

Enveloppes de Pareto et Réseaux de Manhattan

Caractérisations et Algorithmes

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 12 décembre 2005

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de la Méditerranée – Aix-Marseille II

Spécialité : Informatique

par

M. Karim Nouioua

Composition du jury

M. Jean-Daniel BOISSONNAT	Directeur de recherche INRIA, Sophia Antipolis (rapporteur)
M. Victor CHEPOI	Professeur, Université Aix-Marseille II (directeur)
M. Gérard CORNUÉJOLS	Professeur, Université Aix-Marseille II (examineur)
M. Jean-François MAURRAS	Professeur, Université Aix-Marseille II (invité)
M. Andrés SEBÖ	Directeur de recherche CNRS, Université de Grenoble (rapporteur)
M. Yann VAXÈS	Maître de Conférences, Université Aix-Marseille II (co-directeur)

Mis en page avec la classe thloria.

A papa et maman,

*“Si tu cours, tu iras plus vite,
si tu marches, tu iras plus loin,
si tu cries, tu seras entendu,
si tu parles, tu seras écouté,
et si tu calcules trop, tu te tromperas.”*

ALAIN AYACHE

Remerciements

La première personne qui me vient à l'esprit et que je tiens à remercier profondément pour tout ce qu'elle m'a apporté est Victor Chepoi. Un chercheur passionné dont l'enthousiasme pour l'algorithmique m'a séduit dès mon année de licence et m'a amené à partager sa passion. J'exprime également ma profonde gratitude à Yann Vaxès qui m'a donné, avec Victor, tous les ingrédients d'un encadrement de qualité (merci Yann pour m'avoir sorti des périodes de doutes qui jonchent le parcours du thésard). Je les remercie de m'avoir soutenu et aidé dans les moments les plus cruciaux tels que l'obtention d'une bourse de doctorat ou la rédaction de ce document. Enfin, je les remercie d'avoir respecté mes choix qui ont été quelquefois différents des leurs.

Jean-Daniel Boissonnat et András Sebö m'ont fait l'honneur d'accepter les rôles de rapporteur de cette thèse malgré un emploi du temps surchargé en cette période de fin d'année. Je les en remercie, leurs différentes suggestions me permettront d'améliorer la qualité de la version finale de ce document. Je suis également flatté de la présence dans mon jury de Gérard Cornuéjols et Jean-François Maurras, deux personnes avec qui les conversations sont toujours pleines de joie et de bonne humeur.

Je remercie l'ensemble des membres du département d'informatique de la faculté des sciences de Luminy pour m'avoir d'abord formé puis accueilli à leurs côtés avec beaucoup de sympathie et une grande disponibilité. Si j'en suis là aujourd'hui, c'est entre autres grâce à eux. Je citerai Elisabeth qui est toujours prête à rendre service, Line avec qui je me régale à critiquer son ancien colocataire de bureau (Mister Régis), Edouard qui a toujours cru en moi, Christian et Jacques qui m'ont montré qu'on peut mêler sérieux et grosses rigolades, Jean-Luc et Claude qui m'ont souvent dépêtré de pépins informatiques, Henri que j'ai harcelé de questions ces derniers temps et qui m'a toujours répondu avec pédagogie et plaisir (du moins je crois), Nadia qui a toujours répondu à mes questions de SATisfiabilité avec gentillesse et sourire, Jean-François dont les anecdotes me font toujours sourire, Michel dont les propos pleins de vérités ont rythmé cette fin de thèse, Paul et Jean avec qui je discute souvent des matchs (défaites :-') de l'olympique, et enfin Bob qui n'arrête pas de me martyriser sur le terrain de foot (lâche le ballon! lève la tête!). Je remercie également Stéphane qui m'a permis d'effectuer des vacances (€!) lors de mon année de DEA par l'intermédiaire de Philippe Jégou.

Merci à mon "comité de relecture de thèse" dont les nombreux membres m'ont conseillé sur le fond et la forme. Mention spéciale pour Mumu qui s'est tapée tout le document, Noël pour ses nombreuses remarques typographiques, Régis que j'ai traqué tout l'été pour savoir si la présentation de tel ou tel lemme lui semblait bien amenée (au fait Régis, j'attends toujours une preuve plus élégante du Lemme 2.2.5), et enfin le petit Yann et Jérôme dont j'ai exploité les vivacités d'esprit.

Merci à Brigitte, Gaella, Isabelle, Muriel et Sylvie (et Antonio) dont les sourires féminins égaillent mes journées :-). Merci à mes camarades de l'équipe des rouges pour les nombreuses victoires remportées contre l'équipe des bleus (je parle ici des matchs hebdomadaires organisés au département d'info). Profonde admiration pour l'équipe des bleus qui sont restés fair-play malgré de nombreuses défaites :-').

Merci à mes potes les thésards qui m'ont supporté ces dernières années. Medhi que j'ai exterminé 3 fois au bras de fer pour le convaincre qu'il fallait venir jouer au foot avec nous, Roumen dont les membres inférieurs imposants font de lui un excellent gardien, et Khallil le magnifique (un autre que devrait martyriser Bob : Khallil lâche le ballon!). Merci à Olivier qui m'a recruté au sein de son équipe de foot, qui me permet de garder la forme et surtout de passer

d'excellents moments (Viva Celta Maubourguet!!).

Merci à Frédéric Gardi et Bertrand Estellon dont je ne citerai pas les qualités et les nombreux services qu'ils m'ont donné car la liste est bien trop longue. Merci les mecs pour l'énorme travail que vous avez abattu, je suis persuadé que notre collaboration de chercheur durera encore longtemps.

Merci à ma famille et à mes proches pour leur éternel soutien (Cindy, Paolux, Nolwenn, Celine, Crapo, Crucho, Gé, Farid, Mathieu ...), et à ma "beauté" pour son amour et sa patience.

Karim

Table des matières

Introduction	1
1 Problématique et résultats de la thèse	1
2 Etat de l’art	8
3 Plan de la thèse	11
<hr/>	
Partie I Enveloppes de Pareto	13
1 Préliminaires	15
2 Propriétés et caractérisations	19
2.1 Propriétés générales	19
2.1.1 Un ensemble toujours efficace	19
2.1.2 La domination proche	20
2.2 Enveloppe de Pareto dans l’espace (\mathbb{R}^m, d_1)	21
2.2.1 Notion d’ensemble porté	21
2.2.2 Un complexe cubique	23
2.2.3 Etude dans la grille unitaire	27
2.2.4 Domination discrète	28
2.2.5 Ensembles médians	32
2.2.6 Une “enveloppe” pour l’enveloppe de Pareto	36
2.2.7 Caractérisations	38
2.2.8 Convexité et super-connexité (ou ℓ_1 -isométrie)	43
2.3 Enveloppe de Pareto dans l’espace (\mathbb{R}^m, d_∞)	45

2.3.1	Caractérisation dans \mathbb{R}^2	45
2.3.2	Caractérisation dans \mathbb{R}^m	45
2.3.3	Liens avec les enveloppes injectives	49
3	Algorithmes de construction dans \mathbb{R}^2 pour d_1 et d_∞	53
3.1	Pré-traitements	53
3.2	Un algorithme par balayage	54
3.3	Masque d'un sommet de la grille	56
3.4	Un algorithme par cerclage	59
4	Algorithmes de construction dans \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^m pour d_1 et d_∞	61
4.1	Algorithme par cerclage dans (\mathbb{R}^3, d_1)	61
4.2	Algorithme par projection dans (\mathbb{R}^3, d_1)	66
4.3	Un algorithme dans \mathbb{R}^m pour les normes polyédrales	68
4.3.1	Efficacité d'un point	69
4.3.2	L'algorithme GénériquePolyédrale	70
4.4	Implémentation	71
<hr/>		
Partie II	Réseaux de Manhattan	75
5	Préliminaires	77
6	Division en sous-problèmes	79
6.1	Réseaux de Manhattan et grille de Pareto	79
6.2	Division en sous-problèmes	81
6.3	Propriétés des sous-problèmes	83
7	L'ensemble générateur bande-escalier	85
7.1	Ensemble générateur	85
7.2	Voisinage d'un terminal	86
7.3	La famille des bandes horizontales et verticales	89
7.4	La famille des escaliers	90

7.5	L'ensemble générateur bande-escalier	92
7.6	Agencement des bandes et des escaliers	93
8	Formulation en programmation linéaire en nombres entiers	97
8.1	Notion de coupe	97
8.2	Programme linéaire en nombres entiers	98
8.3	Programme linéaire primal (relaxation linéaire)	98
8.4	Programme linéaire dual	100
8.5	Principes d'analyse	100
9	Algorithmes	103
9.1	Un algorithme par arrondis de facteur 2	103
9.1.1	L'algorithme ManhattanArrondi2	103
9.1.2	Analyse	106
9.2	Un algorithme primal-dual de facteur 3	107
9.2.1	L'algorithme ManhattanPrimalDual3	107
9.2.2	Analyse	109
9.3	Un algorithme primal-dual de facteur 2	114
9.3.1	L'algorithme ManhattanPrimalDual2	114
9.3.2	Analyse	120
9.4	Résultats expérimentaux	125
9.4.1	Les instances	125
9.4.2	Résolutions exactes	126
9.4.3	Qualité des solutions approchées	127
9.4.4	Temps d'exécution	127
	<hr/>	
	Conclusion	131
	Bibliographie	133

Table des figures

1	Enveloppes de Pareto dans \mathbb{R}^2 pour les distances d_1 , d_2 et d_∞	2
2	L'ensemble $\Upsilon_{d_1}(T)$	2
3	L'ensemble $\mathcal{I}(T)$ dans \mathbb{R}^3	3
4	$\text{med}(T)$ et $\mathcal{M}(T)$	4
5	L'ensemble $\Upsilon_{d_\infty}(T)$ dans \mathbb{R}^3	4
6	Un réseau de Manhattan minimal	5
7	Les bandes horizontales, verticales et les escaliers	6
8	Un escalier	7
9	Les réseaux des bandes horizontales, verticales et des escaliers	8
1.1	Les différentes formes géométriques d'un intervalle	17
2.1	$\Upsilon_{d_1}(T) \neq \mathcal{P}_{d_1}(T)$ en dimension 3	20
2.2	Un orthant	22
2.3	La grille rectilinéaire $G(T)$	24
2.4	Un complexe cubique et $\Pi(T)$	24
2.5	Orthant dominé	25
2.6	Illustration du Lemme 2.2.7	26
2.7	Equivalence par une transformation isotone	27
2.8	Illustration du Lemme 2.2.10	28
2.9	Illustration du Lemme 2.2.12	29
2.10	Illustration du Lemme 2.2.12	30
2.11	La domination discrète quand $\Delta(p, q) = 2$	31
2.12	Point médian	32
2.13	Construction de la réalisation géométrique $\mathcal{M}(T)$	33
2.14	Illustration du Lemme 2.2.14	34
2.15	Illustration du Lemme 2.2.16	35
2.16	L'ensemble $\mathcal{I}(T)$ dans \mathbb{R}^3	37
2.17	Illustration de la Proposition 2.2.6	39

2.18	Illustration de la Proposition 2.2.7	40
2.19	Illustration de la Proposition 2.2.9	42
2.20	$\mathcal{P}_{d_1}(T) \neq \mathcal{M}(T)$ et $\mathcal{P}_{d_1}(T) \neq \mathcal{I}(T)$ dans \mathbb{R}^4	43
2.21	Isomorphisme des boules d_1 et d_∞	45
2.22	Construction de $\mathcal{P}_{d_\infty}(T)$ par rotation	46
2.23	Définition géométrique de l'intervalle $I_{d_\infty}(p, q)$	47
2.24	L'ensemble $\mathcal{C}(p)$ pour un point p de \mathbb{R}^2	48
2.25	L'ensemble $\mathcal{U}(T)$ dans \mathbb{R}^2	49
2.26	L'enveloppe injective de 2, 3, 4 et 5 points	51
3.1	La structure grille	54
3.2	Les quatre chaînes	55
3.3	La représentation par bandes et par paliers	56
3.4	Division du plan	57
3.5	Illustration de la mise à jour d'un masque	58
3.6	La chaîne décrivant la frontière de $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ dans le plan	59
4.1	Intersection de $\mathcal{P}_1(T)$ avec un palier parallèle au plan $H^{\{2,3\}}$	62
4.2	Les trois types de cerclages de l'enveloppe $\mathcal{P}_{d_1}(T)$	63
4.3	Les graphes G' et G	64
4.4	Correction de l'algorithme CerclageR2L1	65
4.5	Les deux premières phases de l'algorithme ProjectionR3L1	67
4.6	Restriction d'une face à $\mathcal{I}(T)$	68
4.7	Exemples d'enveloppes de Pareto dans (\mathbb{R}^3, d_1)	72
4.8	Exemples d'enveloppes de Pareto dans (\mathbb{R}^3, d_∞)	73
5.1	Un chemin rectilinéaire et un chemin de Manhattan	77
6.1	Grille de Pareto d'un ensemble de terminaux	79
6.2	Illustration du Lemme 6.1.2	80
6.3	Déroulement de l'algorithme Division-Fusion	81
6.4	Un bloc indivisible	83
6.5	Illustration du Lemme 6.3.1	84
7.1	Paires génératrices	86
7.2	Voisinage d'un terminal et illustration du Lemme 7.2.1	87
7.3	Déroulement de l'algorithme CalculerO₁(T)	88
7.4	Bandes horizontales et verticales	89
7.5	Agencement des bandes et des escaliers	90

7.6	Un escalier	91
7.7	Orientations des escaliers	91
7.8	Illustration du Lemme 7.5.1	93
7.9	Illustration du Lemme 7.6.1	94
8.1	Le graphe Γ_{ij} et trois types de (t_i, t_j) -coupes	97
8.2	Gap d'intégralité	99
8.3	Solutions primale et duale optimales	101
9.1	Procédure <code>ArrondirBande</code>	104
9.2	Procédure <code>ArrondirEscalier</code>	105
9.3	Réseau construit par la procédure <code>BandePrimalDual3</code>	107
9.4	La procédure <code>EscalierPrimalDual2</code>	108
9.5	Les coupes associées aux arêtes horizontales de N_1	110
9.6	Les coupes associées aux segments de la procédure <code>EscalierPrimalDual2</code>	111
9.7	Ensemble de coupes associées aux arêtes d'un escalier	112
9.8	Instance serrée pour l'algorithme <code>ManhattanPrimalDual3</code>	113
9.9	Illustration de la procédure <code>BandePrimaleDuale1</code>	114
9.10	Le réseau N_1^H	115
9.11	Illustration de l'algorithme <code>ManhattanPrimalDual2</code>	116
9.12	La forme des chemins $P_{ii'}$ et $P_{jj'}$	117
9.13	Illustration de la procédure <code>BaseEscalier</code>	118
9.14	Le réseau optimal primal N_H^1 et la solution duale optimale \mathbf{y}'	120
9.15	Les coupes associées aux arêtes des réseaux N_1^H et N_1^V	121
9.16	L'ensemble de coupes associées aux escaliers avec morceaux	122
9.17	Performance du programme linéaire en nombres entiers	125
9.18	Solutions de <code>ManhattanPrimalDual3</code> et <code>ManhattanPrimalDual2</code>	126
9.19	Solutions de <code>ManhattanArrondi2</code> et <code>EscalierPrimalDual2</code>	127
9.20	Temps d'exécution des algorithmes d'approximation	128
9.21	Réseaux construits par les trois algorithmes d'approximation	129

Introduction

Cette thèse se situe à la frontière entre la géométrie algorithmique et l'optimisation combinatoire. Elle est consacrée à l'étude de deux objets géométriques, les enveloppes de Pareto et les réseaux de Manhattan. L'un est de nature continue et l'autre est de nature discrète. La thèse propose des caractérisations et des algorithmes efficaces de construction, exacts ou approchés, en s'inspirant des techniques de la géométrie algorithmique, de l'optimisation combinatoire et du domaine des algorithmes d'approximation.

1 Problématique et résultats de la thèse

Les enveloppes convexes d'ensembles finis de points de l'espace \mathbb{R}^m constituent un objet d'étude fondamental en géométrie algorithmique. Des dizaines de travaux ont été dédiés à la conception d'algorithmes efficaces de construction de ces enveloppes ; plusieurs ouvrages de géométrie algorithmique consacrent des chapitres entiers à la description de ces algorithmes [15, 24, 59]. Au-delà de leurs applications en statistiques, en robotique et en imagerie, les enveloppes convexes sont étroitement liées par des transformations géométriques aux diagrammes de Voronoï et aux triangulations de Delaunay, deux autres structures géométriques fondamentales. Les enveloppes convexes vues comme l'espace des solutions de problèmes d'optimisation sont également des objets d'étude privilégiés en optimisation combinatoire et en programmation linéaire [17, 22, 53, 61]. Elles accueillent également les solutions optimales de nombreux problèmes de localisation : des points remarquables comme le centre, le barycentre, le point de Fermat ou la médiane d'un ensemble fini de points T , ainsi que l'arbre de Steiner qui sont tous situés dans l'enveloppe convexe $\text{conv}(T)$. Tous ces problèmes consistent à minimiser une fonction objectif liée à la distance euclidienne. Cela a conduit H. Kuhn [48, 49] à caractériser l'enveloppe convexe de T en terme métrique de la façon suivante : $\text{conv}(T)$ est constituée exactement de l'ensemble des points p de \mathbb{R}^m dont le vecteur des distances euclidiennes jusqu'aux points de T est non dominé, *i.e.*, il n'existe pas un autre point $q \in \mathbb{R}^m$ dont le vecteur des distances jusqu'à T est strictement meilleur que celui de p .

Cette caractérisation de $\text{conv}(T)$ conduit à étudier les ensembles ainsi définis en remplaçant la distance euclidienne d_2 par une distance quelconque d sur \mathbb{R}^m , et en particulier par une distance issue d'une norme. Pour définir cette notion plus formellement, rappelons une notion fondamentale en optimisation multicritère : l'*optimalité de Pareto*. Etant donné un vecteur de fonctions $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ défini sur un ensemble S , on dit qu'un point $y \in S$ est *dominé* par un point $x \in S$ si $f_i(x) \leq f_i(y)$ pour tout indice $i \in \{1, \dots, n\}$ et si il existe un indice $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $f_j(x) < f_j(y)$. On appelle alors *ensemble des optima de Pareto* ou *enveloppe de Pareto* de S associé au vecteur de fonctions \mathbf{f} , l'ensemble des points non-dominés (ou *efficaces*) de S . Étant donné l'espace métrique (\mathbb{R}^m, d) et un ensemble fini de *terminaux* $T = \{t_1, \dots, t_n\}$ de

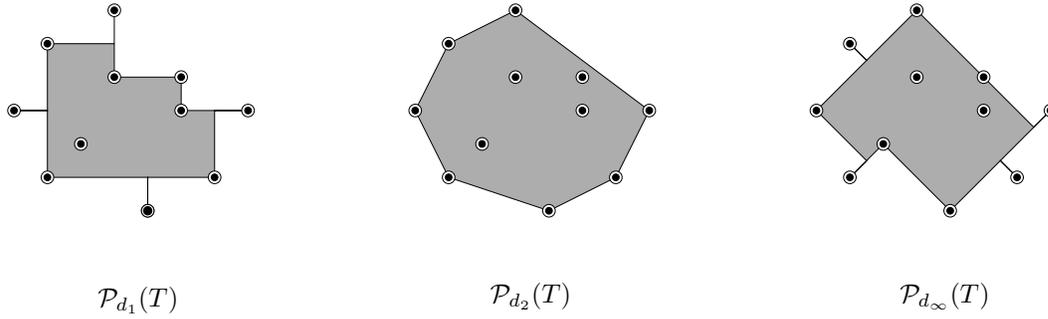


FIG. 1 – Enveloppes de Pareto dans \mathbb{R}^2 pour les distances d_1 , d_2 et d_∞

\mathbb{R}^m , on peut considérer la fonction $\mathbf{d}(x) = (d(t_1, x), \dots, d(t_n, x))$ et l’optimalité de Pareto par rapport à cette fonction particulière. Compte tenu du résultat de Kuhn, on appelle l’ensemble des optima de Pareto par rapport à \mathbf{d} l’enveloppe de Pareto de T , et on note cet ensemble par $\mathcal{P}_d(T)$. L’ensemble des points non dominés tel qu’il n’existe aucun autre point avec le même vecteur de distances constitue la partie stricte de l’enveloppe de Pareto et sera notée par $\mathcal{P}_d^0(T)$. La Figure 1 représente les enveloppes de Pareto de 11 points du plan pour d_1 , d_2 et d_∞ . Les enveloppes de Pareto sont aussi connues dans la littérature sous le nom d’ensembles efficaces [18, 28, 29, 30, 58, 66, 73, 74]. Par la suite, nous présenterons une synthèse de ces papiers. Signalons seulement que [18] a été le point de départ de notre recherche sur les enveloppes de Pareto. Ce papier présente un algorithme par balayage en temps optimal $O(n \log n)$ permettant de construire l’enveloppe de Pareto dans le plan \mathbb{R}^2 muni de la distance d_1 . Cet algorithme est justifié par la caractérisation suivante :

$$\mathcal{P}_{d_1}(T) = \cap_{i=1}^n (\cup_{j=1}^n I_{d_1}(t_i, t_j)) =: \Upsilon_{d_1}(T) \tag{1}$$

Dans un espace métrique (X, d) , rappelons que $I_d(x, y) = \{z \in X : d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)\}$ est l’intervalle entre x et y . Ces intervalles ont des formes géométriques particulières en fonction de la distance considérée [16] : $I_{d_1}(x, y)$ est le parallélogramme axe-parallèle de diagonale $[x, y]$, $I_{d_2}(x, y)$ est le segment $[x, y]$, et enfin $I_{d_\infty}(x, y)$ est un rectangle de diagonale $[x, y]$ dans le plan et un octaèdre dans \mathbb{R}^3 . La Figure 2, pour $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$, représente l’ensemble $\Upsilon_{d_1}(T)$ et les quatre ensembles dont il est l’intersection. Comme les espaces métriques (\mathbb{R}_2, d_1) et (\mathbb{R}_2, d_∞) sont équivalents modulo rotation et dilatation, notons que la caractérisation (1) est également vraie dans le plan muni de la distance d_∞ , i.e., $\mathcal{P}_{d_\infty}(T) = \Upsilon_{d_\infty}(T)$.

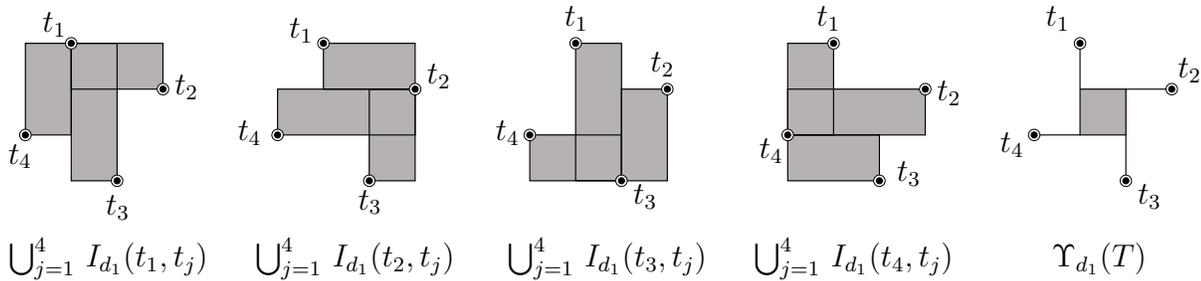
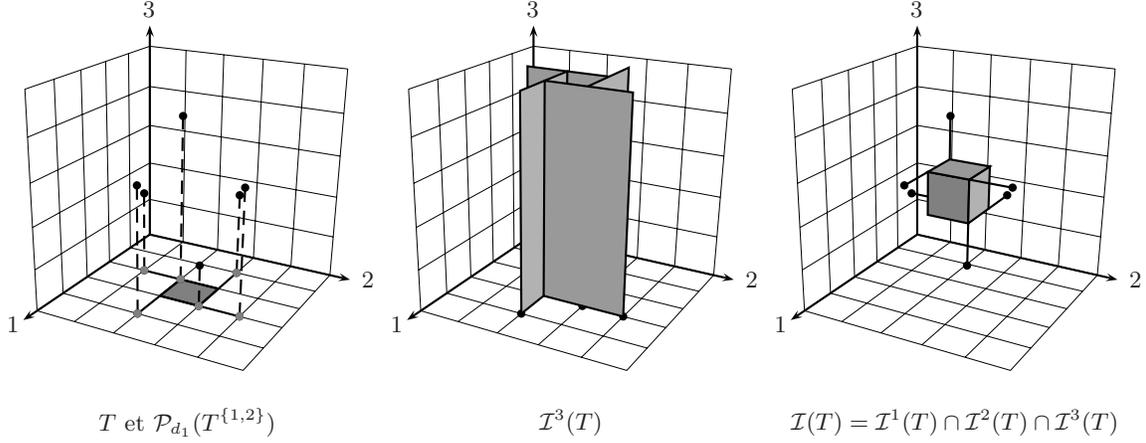


FIG. 2 – L’ensemble $\Upsilon_{d_1}(T)$

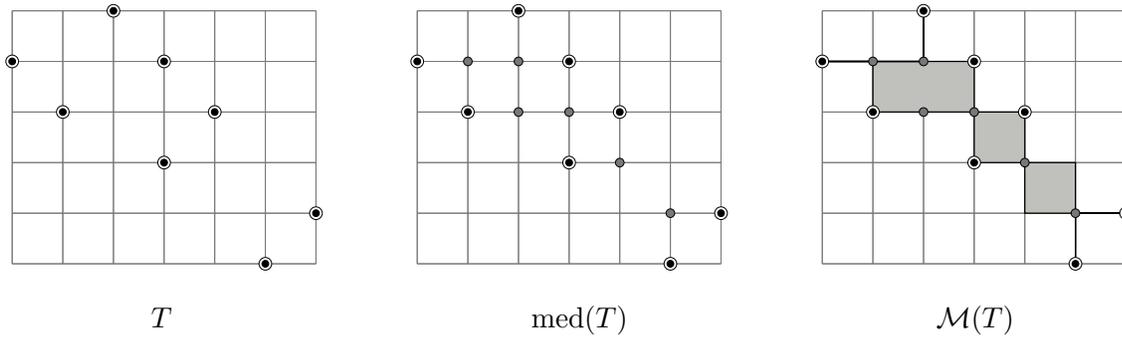
Le but de la première partie de la thèse est d’étendre les résultats structuraux et algorithm-


 FIG. 3 – L'ensemble $\mathcal{I}(T)$ dans \mathbb{R}^3

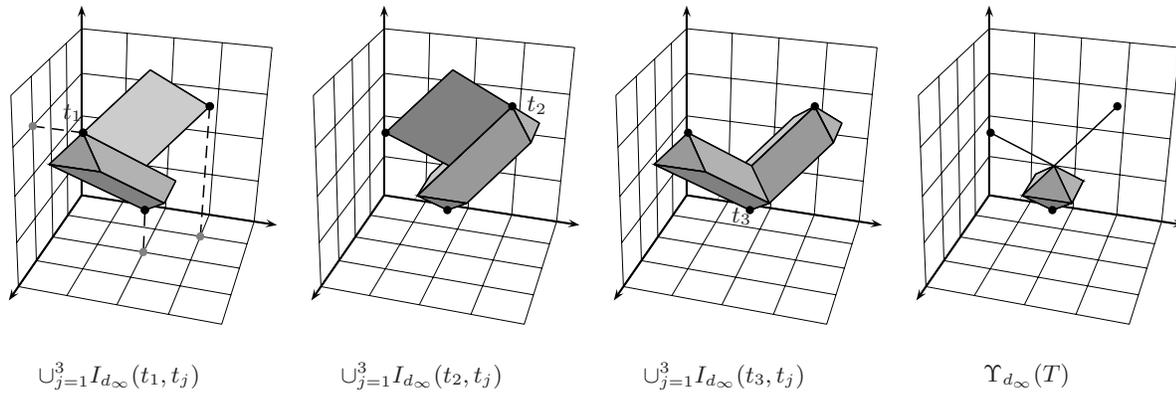
miques obtenus par Chalmet, Francis et Kolen [18] aux espaces de dimensions supérieures pour les métriques d_1 et d_∞ . Dans le cas de la métrique d_1 , l'enveloppe de Pareto est un complexe cellulaire dont les cellules sont des parallélépipèdes axe-parallèles. Ces parallélépipèdes sont définis par la *grille rectilinéaire* obtenue en traçant la famille des hyperplans orthogonaux à chaque axe et passant par chaque terminal. Même si la caractérisation de Chalmet *et al.* n'est plus valable dans (\mathbb{R}^3, d_1) , nous avons trouvé une caractérisation spécifique à \mathbb{R}^3 . Notamment, nous établissons l'égalité

$$\mathcal{P}_{d_1}(T) = \mathcal{I}(T) = \mathcal{M}(T), \quad (2)$$

où les ensembles $\mathcal{I}(T)$ et $\mathcal{M}(T)$ sont définis de la façon suivante. L'ensemble $\mathcal{I}(T)$ est l'intersection de trois polyèdres $\mathcal{I}^1(T)$, $\mathcal{I}^2(T)$ et $\mathcal{I}^3(T)$. Le polyèdre $\mathcal{I}^i(T)$, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, est le produit cartésien de l'enveloppe de Pareto de la projection orthogonale de T sur le plan $x_i = 0$ et d'une droite orthogonale à ce plan. La Figure 3 représente, pour six terminaux, l'enveloppe de Pareto 2-dimensionnelle de la projection de T sur le plan $x_3 = 0$, le polyèdre $\mathcal{I}^3(T)$, et l'ensemble $\mathcal{I}(T)$. Pour introduire $\mathcal{M}(T)$, rappelons d'abord la notion de médian de trois points x , y et z : il s'agit d'un point dont la coordonnée i est la médiane des coordonnées i des trois points. Etant donné un ensemble de terminaux T , la *fermeture médiane* $\text{med}(T)$ de T est le plus petit sous-ensemble contenant T fermé par rapport à l'*opération médiane*. Dans le plan, pour construire $\text{med}(T)$, il suffit de prendre la médiane de chaque triplet de terminaux. Dans l'espace \mathbb{R}^3 , il faut réitérer cette opération une fois [71]. Notons que la fermeture $\text{med}(T)$ est toujours incluse dans l'ensemble des sommets de la grille rectilinéaire. Dans \mathbb{R}^2 , $\mathcal{M}(T)$ est le complexe cellulaire composé de l'ensemble des cellules de la grille rectilinéaire qui satisfont l'une des deux propriétés suivantes : tous les sommets de la cellule appartiennent à $\text{med}(T)$; exactement deux sommets diagonalement opposés appartiennent à $\text{med}(T)$. Dans \mathbb{R}^3 , $\mathcal{M}(T)$ est également un complexe cellulaire défini par des règles similaires à celles du plan. La Figure 4 représente l'ensemble T , la fermeture médiane $\text{med}(T)$ composée de T et des points en gris, et l'ensemble $\mathcal{M}(T)$. Notons que les trois ensembles $\mathcal{P}_{d_1}(T)$, $\mathcal{I}(T)$ et $\mathcal{M}(T)$ ne coïncident plus en dimension supérieure à 3. Cependant, nous avons l'inclusion $\mathcal{P}_{d_1}(T) \subseteq \mathcal{I}(T) \subseteq \mathcal{M}(T)$. L'égalité (2) permet de construire l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ en temps optimal $O(n \log n)$ pour des points de \mathbb{R}^3 (Algorithme **ProjectionR3L1**). Une autre conséquence de cette caractérisation est que la complexité de la frontière

FIG. 4 – $\text{med}(T)$ et $\mathcal{M}(T)$

$\mathcal{P}_{d_1}(T)$ est $O(n)$. Nous donnons aussi des algorithmes, dits “par cerclage”, basés sur une exploration de la frontière de l’enveloppe de Pareto avec des règles locales de progression (cet algorithme est semblable, dans son esprit, à l’algorithme “paquet cadeau” de construction des enveloppes convexes). Ce principe de cerclage conduit à un algorithme de complexité $O(n \log n)$ dans le plan et $O(n^2)$ dans l’espace 3-dimensionnel (Algorithme `CerclageR3L1`). Pour construire $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ dans \mathbb{R}^m , nous décrivons un algorithme générique (`GénériquePolyédrale`) permettant de construire $\mathcal{P}_d(T)$ pour toute distance d induite par une norme polyédrale. Cet algorithme construit $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ en temps $O(n^{m+1}2^{m-1}m)$.

FIG. 5 – L’ensemble $\Upsilon_{d_\infty}(T)$ dans \mathbb{R}^3

Dans la première partie, nous présentons également deux caractérisations des enveloppes de Pareto de l’espace (\mathbb{R}^m, d_∞) qui sont valables en toute dimension. L’une de ces caractérisations est similaire à celle donnée par Chalmet *et al.* [18] pour la distance d_1 :

$$\mathcal{P}_{d_\infty}(T) = \bigcap_{i=1}^n (\bigcup_{j=1}^n I(t_i, t_j)) =: \Upsilon_{d_\infty}(T). \quad (3)$$

Comme cette égalité (1) est uniquement vraie dans le plan pour la métrique d_1 , cela montre que la caractérisation de Chalmet *et al.* est en fait spécifique à la métrique d_∞ et non pas à la métrique d_1 . La Figure 5 représente, pour trois terminaux, les trois ensembles d’unions d’octaèdres dont $\Upsilon_{d_\infty}(T)$ est l’intersection. Notons aussi que cette caractérisation est très similaire à celle des enveloppes injectives d’un espace métrique fini obtenue par Isbell [43] et Dress [26]. En effet, l’enveloppe injective de l’espace métrique défini par les terminaux est une partie de

l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_{d_\infty}(T)$ et elle contient la partie stricte de cette enveloppe. En utilisant l'égalité (3), nous obtenons également une caractérisation de l'enveloppe stricte $\mathcal{P}_{d_\infty}^0(T)$ comme intersection d'unions de cônes. En utilisant l'algorithme **GénériquePolyédrale**, l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_{d_\infty}(T)$ peut être construite en $O(n^{m(m-1)+1}m^2)$ dans \mathbb{R}^m .

La deuxième partie de la thèse est dédiée à l'étude du *problème de construction des réseaux de Manhattan minimum*. Un ℓ_1 -chemin entre deux points p et q du plan \mathbb{R}^2 , est un chemin de longueur totale $d_1(p, q)$ constitué uniquement de segments horizontaux et verticaux. Etant donné un ensemble T de n terminaux du plan, un *réseau de Manhattan* est un réseau qui contient un ℓ_1 -chemin entre chaque paire de terminaux de T . Un *réseau de Manhattan minimal* est un réseau de Manhattan de longueur totale minimale et le *problème du réseau de Manhattan minimal* consiste à trouver un tel réseau (Fig. 6). Ce problème a été introduit en 1999 par Gudmundsson, Levcopoulos et Narasimhan [36]. Nous ne savons pas à ce jour si ce problème est NP-difficile ni si il est polynomial. Gudmundsson *et al.* [36] ont proposé un algorithme d'approximation avec un facteur 8 en temps $O(n \log n)$ et avec facteur 4 en temps $O(n^3)$. Rappelons qu'un algorithme d'approximation avec un facteur $k > 1$ pour un problème de minimisation, est un algorithme polynomial qui construit, pour toute instance, une solution dont le coût est inférieur ou égal à k fois le coût de la solution optimale de l'instance. Gudmundsson *et al.* ont également conjecturé l'existence d'un algorithme d'approximation avec un facteur 2. En 2002, nous avons commencé à nous intéresser à cette conjecture en observant qu'il existe toujours un réseau de Manhattan minimal de T contenu dans l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_{d_1}(T)$. Fin 2002, Kato, Imai et Asano [46] ont annoncé avoir un algorithme d'approximation en temps $O(n^3)$ avec un facteur 2, cependant l'analyse proposée et la description de l'algorithme elle-même se sont révélées être incomplètes [12, 13, 20]. Par la suite, en suivant et corrigeant l'approche de [46], Benkert, Shirabe et Wolff [12] ont présenté un algorithme d'approximation avec un facteur 3 en temps $O(n \log n)$. Les algorithmes mentionnés jusqu'ici sont de nature géométrique et certains d'entre eux utilisent des résultats de géométrie algorithmique. Remarquons également qu'il existe toujours une solution optimale du problème contenue dans la grille rectilinéaire définie par les droites verticales et horizontales passant par les terminaux [36, 79].

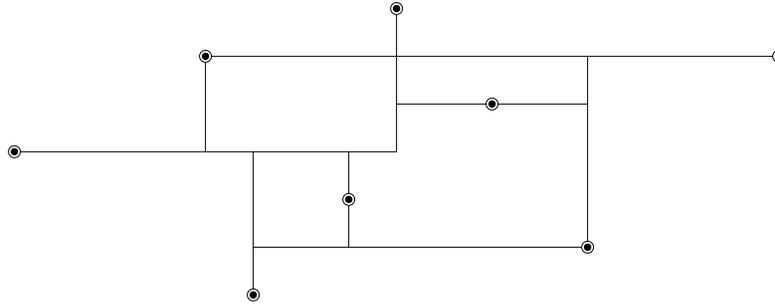


FIG. 6 – Un réseau de Manhattan minimal

Dans cette thèse, nous présentons deux algorithmes d'approximation avec un facteur 2 pour le problème des réseaux de Manhattan minimum, répondant ainsi à la question formulée dans [36]. Ces deux algorithmes reposent sur deux méthodes de conception d'algorithmes d'approximation utilisant la relaxation linéaire d'une formulation en programmation en nombres entiers du problème : la méthode par arrondis et la méthode primale-duale. L'algorithme par arrondis a été présenté dans [20]. L'algorithme primal-dual, de complexité en temps $O(n \log n)$, est une amélioration récente d'un algorithme similaire de facteur 3 décrit dans l'article [57].

Les deux algorithmes utilisent la même formulation en programmation linéaire en nombres entiers. Notons tout d'abord qu'il existe un réseau optimal dont les arêtes appartiennent uniquement à la *grille de Pareto*, *i.e.*, la partie de la grille rectilinéaire contenue dans l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_{d_1}(T)$. D'une part, cela permet de diviser le problème en utilisant la subdivision de l'enveloppe de Pareto en blocs au niveau de ses points d'articulation, et d'autre part cela permet de discrétiser le problème afin de pouvoir le formuler en tant que programme linéaire en nombres entiers de taille polynomiale. Par la suite, chaque bloc sera considéré indépendamment et nous pourrons donc supposer que l'enveloppe de Pareto des terminaux est constituée d'un seul bloc. Cela permet de montrer que la frontière de cette enveloppe est entièrement contenue dans n'importe quel réseau de Manhattan inclus dans $\mathcal{P}_{d_1}(T)$. Le programme linéaire en nombres entiers est obtenu en introduisant une variable binaire x_e pour chaque arête e appartenant à la grille de Pareto. En considérant les variables x_e comme des capacités, les contraintes du programme assurent, pour chaque paire de terminaux, l'existence d'un flot entier de valeur 1 supporté par un des ℓ_1 -chemins connectant la paire. Lorsque la condition d'intégralité est relaxée, ce flot de valeur 1 est fractionnaire, et il est supporté par plusieurs ℓ_1 -chemins connectant la paire. Le programme linéaire correspondant peut être résolu en temps polynomial.

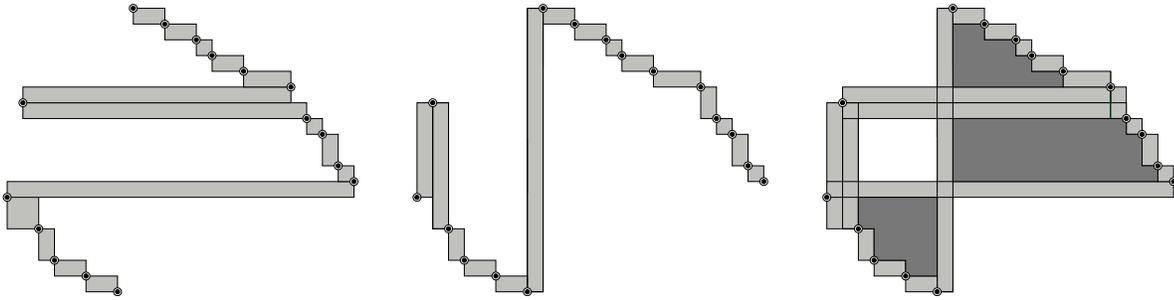


FIG. 7 – Les bandes horizontales, verticales et les escaliers

L'algorithme par arrondis `ManhattanArrondi2` consiste, dans l'idée, à transformer la solution relaxée en une autre solution de même coût tel que, pour chaque paire de terminaux, il existe un flot demi-entier supporté par un des ℓ_1 -chemins connectant la paire. En arrondissant à 1 les variables de chaque flot demi-entier, nous obtenons une solution entière (un réseau de Manhattan) dont le coût est au maximum deux fois plus grand que l'optimum fractionnaire. Pour effectuer cette transformation, deux types de paires de terminaux sont identifiés : les paires issues des bandes et les paires issues des escaliers. De façon intuitive, une *bande* R_{ij} est un rectangle axe-parallèle de diagonale $[t_i, t_j]$ tel que les terminaux t_i et t_j sont consécutifs dans l'une des deux listes des terminaux triés par ordre croissant des coordonnées. En enlevant les bandes de l'enveloppe de Pareto, des régions en forme d'*escaliers* apparaissent. La Figure 7 représente les bandes *verticales*, les bandes *horizontales* et les escaliers, et la Figure 8 représente un escalier, son origine o et les deux bandes formant sa base. Il est possible d'associer à chacune de ces régions un ensemble de paires de terminaux de T et de montrer que l'union F des paires associées aux bandes et aux escaliers forme un *ensemble générateur* dans le sens où un réseau qui satisfait toutes les paires de F est un réseau de Manhattan pour T (cette notion naturelle a été introduite dans [46]). Pour chacun des deux sous-ensembles de paires, celui des bandes et celui des escaliers, nous décrivons une procédure spécifique d'arrondis. La première procédure exploite le fait que deux arêtes parallèles e, e' appartenant aux côtés opposés d'une bande R_{ij} , supportent un flot fractionnaire de valeur 1, et donc, que l'une de ces deux arêtes a une capacité $\geq \frac{1}{2}$. En

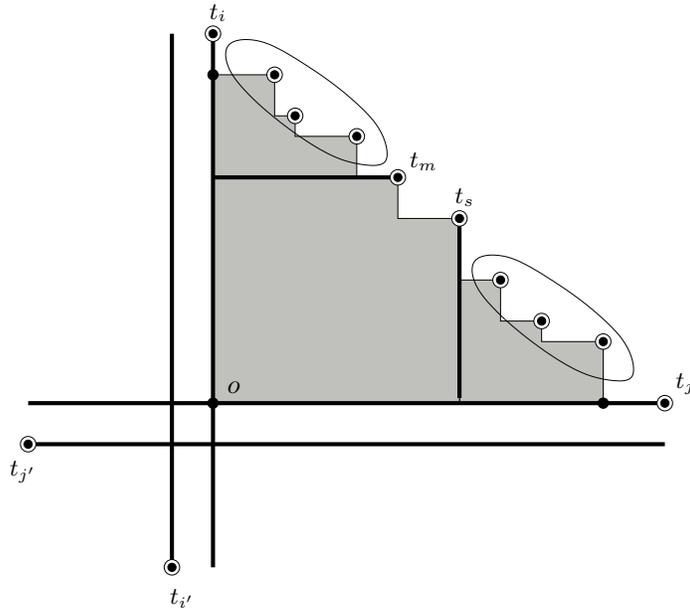


FIG. 8 – Un escalier

effet, d'après la définition de la grille rectilinéaire, tout ℓ_1 -chemin qui connecte t_i et t_j dans la grille de Pareto passe nécessairement par l'une de ces deux arêtes. Après avoir arrondi à 1 les capacités supérieure à $\frac{1}{2}$, nous observons que l'ensemble de ces arêtes plus une arête de passage e'' (*i.e.*, une arête passant d'un côté de la bande à l'autre côté) forme un ℓ_1 -chemin entre les terminaux t_i et t_j . Pour arrondir la capacité de l'arête de passage e'' , qui n'a pas nécessairement une capacité supérieure à $\frac{1}{2}$, l'algorithme diminue de $\frac{1}{2}$ la capacité de l'arête de la frontière de Pareto parallèle à e'' , augmente de $\frac{1}{2}$ la capacité de e'' , puis l'arrondit. Cela est possible car les capacités des arêtes de la frontière de Pareto sont égales à 1 dans n'importe quelle solution du programme linéaire. L'arrondi sur les escaliers utilise une procédure récursive plus complexe. Sans entrer dans les détails, notons seulement que cette procédure est basée sur le fait que le flot total provenant d'un terminal de l'escalier et arrivant sur l'une des deux bases de cet escalier est au moins $\frac{1}{2}$. L'idée est alors d'agréger ce flot sur le segment vertical ou horizontal qui relie le terminal considéré avec la base correspondante et d'arrondir à 1 la capacité de l'ensemble des arêtes qui appartiennent à ce segment. Tout cela conduit à un algorithme d'approximation par arrondis avec un facteur 2.

Les deux autres algorithmes, `ManhattanPrimalDual3` et `ManhattanPrimalDual2`, sont également basés sur la décomposition en bloc de l'enveloppe de Pareto et utilisent aussi l'ensemble générateur bande-escalier F . Ils considèrent le programme en nombres entiers mentionné ci-dessus, sa relaxation linéaire, et le programme linéaire dual de cette relaxation qui est un problème d'empaquetage de coupes. Les deux algorithmes, purement combinatoires, construisent pour chaque instance un réseau de Manhattan N correspondant à une solution admissible \mathbf{x} du programme linéaire en nombres entiers. Pour justifier le facteur d'approximation 3 (resp. 2), une solution duale \mathbf{y} dont le coût est égal à $\frac{1}{3} \cdot |N|$ (resp. $\frac{1}{2} \cdot |N|$) est exhibée. Une solution admissible du dual est représentée par une famille de coupes pondérées des paires de F . Pour une paire $\{t_i, t_j\}$, une coupe est un ensemble d'arêtes de la grille de Pareto qui intersecte tout ℓ_1 -chemin connectant t_i et t_j . Dans les deux algorithmes, même si il y a un nombre exponentiel de coupes, celles

qui reçoivent une pondération positive sont en nombre polynomial et d'une forme spécifique : horizontale, verticale ou en forme de L. Dans le cas de l'algorithme facteur 3, les pondérations non nulles sont égales à $\frac{1}{3}$ et dans le cas de l'algorithme facteur 2, elles sont égales à $\frac{1}{2}$. Le réseau N construit par l'algorithme `ManhattanPrimalDual3` est obtenu en prenant toutes les arêtes appartenant aux deux côtés opposés des bandes (Fig 9) et en exécutant l'algorithme récursif suivant sur les escaliers. Dans chaque escalier, l'algorithme identifie l'unique paire de terminaux consécutifs $\{t_m, t_s\}$ tel que t_m soit plus proche de la base verticale de l'escalier et t_s soit plus proche de la base horizontale (Fig. 8). L'algorithme ajoute au réseau N toutes les arêtes des segments horizontaux et verticaux qui relient ces terminaux à leurs bases respectives, et réitère l'opération sur les deux sous-escaliers générés. Pour chaque arête prise dans cette solution, nous identifions une coupe à laquelle nous attribuons une pondération $\frac{1}{3}$. Nous montrons alors que par chaque arête de la grille il passe au maximum trois coupes dont la pondération est non nulle. Pour obtenir l'algorithme `ManhattanPrimalDual2`, la première phase de l'algorithme `ManhattanPrimalDual3` est remplacée par un balayage vertical et un balayage horizontal qui permettent de choisir un ℓ_1 -chemin pour chaque bande. La deuxième phase est aussi légèrement modifiée pour tenir compte des interactions entre les bandes et les escaliers et ainsi obtenir une famille de coupes tel que par chaque arête de la grille il passe au maximum deux coupes ayant une pondération non-nulle.

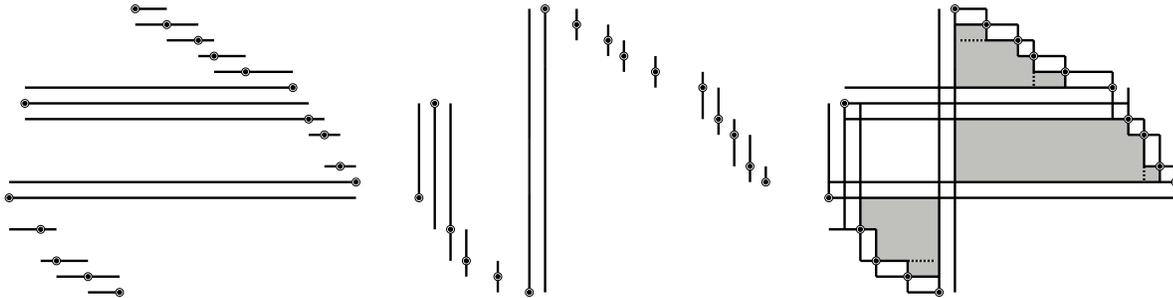


FIG. 9 – Les réseaux des bandes horizontales, verticales et des escaliers

2 Etat de l'art

Après cette présentation des principaux résultats de la thèse, nous continuons avec un état de l'art sur les enveloppes de Pareto, les réseaux de Manhattan et les structures et problèmes liés à ces objets.

Comme nous l'avons déjà mentionné, la notion d'optimalité de Pareto a été appliquée pour la première fois aux vecteurs de distances jusqu'à un ensemble fini de terminaux T par H. Kuhn [48, 49] qui établit l'égalité

$$\mathcal{P}_{d_2}(T) = \text{conv}(T). \quad (4)$$

En effet, la preuve de cette égalité est élémentaire. D'une part, si un point q est dominé par un point p alors tous les terminaux se situent dans le même demi-espace ouvert que p défini par l'hyperplan orthogonal à la droite (p, q) et donc q n'appartient pas à $\text{conv}(T)$. Cela montre que $\text{conv}(T)$ est incluse dans $\mathcal{P}_{d_2}(T)$. Pour démontrer l'inclusion réciproque, il suffit de remarquer que chaque point $q \notin \text{conv}(T)$ est dominé par son unique projection métrique sur $\text{conv}(T)$.

Dans [66], Thisse, Ward et Wendell ont montré que l'égalité (4) reste valable pour toutes les métriques issues de norme dont la boule unitaire est ronde (en chaque point de la frontière de la boule unitaire il existe un unique plan tangent). Aucune des deux inclusions $\mathcal{P}_d(T) \subseteq \text{conv}(T)$ et $\text{conv}(T) \subseteq \mathcal{P}_d(T)$ n'est vraie en général. Par exemple, elles ne le sont pas pour la norme ℓ_1 ou la norme ℓ_∞ . Néanmoins, Wendell et Hurter [73] ont montré que l'enveloppe de Pareto stricte $\mathcal{P}_d^0(T)$ est incluse dans $\text{conv}(T)$ pour toutes les normes. L'étude des enveloppes de Pareto pour des normes spécifiques a été initiée par Wendell, Hurter et Lowe [74] et prolongée ensuite par Chalmet, Francis et Kolen [18] et Durier et Michelot [28, 29]. Le résultat principal de Chalmet *et al.* qui établit l'égalité (1) dans le plan, a déjà été mentionné ci-dessus. Pour les normes polyédrales, Durier et Michelot introduisent la notion d'ensembles convexes élémentaires qui jouent le rôle des cellules des complexes cubiques mentionnés précédemment. Un *ensemble convexe élémentaire*, est un ensemble fermé convexe C de \mathbb{R}^m qui peut s'écrire comme l'intersection des cônes générés par les faces de la boule unitaire centrée dans un terminal. Ils montrent que, pour toute norme polyédrale, l'espace sera partitionné en cellules qui sont des convexes élémentaires et que l'enveloppe de Pareto est une union connexe et finie de telles cellules. Même si Durier [28] mentionne deux règles de détection pour tester si un point x appartient à l'enveloppe de Pareto ou non, aucune description algorithmique n'est fournie.

Le premier algorithme de construction de $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ dans le plan a été proposé par Wendell *et al.* [74] et sa complexité en temps est $O(n^2)$. Chalmet *et al.* [18] proposent un algorithme par balayage en temps optimal $O(n \log n)$ (une description simplifiée de cet algorithme sera donnée dans la première partie de la thèse). Pelegrin et Fernandez [58] décrivent un algorithme pour construire l'enveloppe de Pareto dans le plan muni d'une norme polygonale dont la complexité (qui n'est pas donnée) dépend du nombre de sommets de la boule unitaire.

Un certain nombre de travaux ont consisté à utiliser la notion d'enveloppe de Pareto pour réduire l'espace de recherche de certains problèmes d'optimisation en montrant que ces enveloppes accueillent les solutions optimales des problèmes en question. Par exemple, Wendell et Hurter [73], considèrent ce type de propriétés pour une version pondérée du problème de médiane connu sous le nom de problème de Weber, tandis que Hansen, Perreux et Thisse [41] donnent le même type de résultat pour le problème *Multifacility Location*. Pour d'autres résultats de ce type voir [29, 66]. Dans cette thèse, nous montrons que les enveloppes de Pareto accueillent des réseaux de Manhattan minimum.

Les enveloppes de Pareto en norme ℓ_1 et ℓ_∞ sont étroitement liées aux deux structures suivantes qui apparaissent dans les mathématiques discrètes et la géométrie des espaces métriques : les espaces médians et les enveloppes injectives. Un espace métrique est un *espace médian* si pour chaque triplet de points u, v et w , il existe un unique point $m = m(u, v, w)$ situé simultanément dans les intervalles $I(u, v)$, $I(v, w)$ et $I(u, w)$. Les espaces médians finis et plus généralement les espaces médians discrets apparaissent en algèbre universelle sous le nom d'algèbre médian [11, 43], en théorie des graphes sous le nom de graphes médians [6, 54, 55, 56] et en informatique théorique comme ensemble de solutions d'une formule 2-SAT ; pour une synthèse des résultats sur les structures médianes voir [8]. A partir d'un graphe médian, un complexe cubique peut être défini en transformant chaque cube graphique en un cube solide. En munissant ces complexes cubiques médians d'une métrique intrinsèque ℓ_2 , nous obtenons exactement les classes de complexes cubiques dont la métrique intrinsèque possède une courbure non-positive [19]. En combinant ce résultat avec la caractérisation de ces complexes cubiques donnée par Gromov [38], nous déduisons que les enveloppes de Pareto $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ dans \mathbb{R}^3 sont exactement les complexes cubiques de la grille rectilinéaire, simplement connexes, qui satisfont la propriété suivante : si un cube de la grille rectilinéaire possède trois faces deux à deux incidentes appartenant à l'enveloppe

de Pareto alors le cube lui-même est dans l’enveloppe.

L’égalité (1) se généralise sans difficulté à tous les espaces injectifs, dits aussi hyperconvexes. Un espace métrique est dit *hyperconvexe* [1, 43] si pour toute famille de boules fermées $B(x_i, r_i)$ centrées en x_i de rayon r_i , $i \in I$, tel que $d(x_i, x_j) \leq r_i + r_j$ pour chaque $i, j \in I$, possède un point commun (la propriété de Helly). Les espaces injectifs sont exactement les retracts absolus [1], *i.e.*, si un tel espace X est plongé isométriquement dans un espace plus grand Y alors il existe une application non-expansive de Y dans X idempotent sur X . Il a été démontré par Isbell [43] et Dress [26] que pour chaque espace métrique (X, d) , il existe un unique plus petit espace injectif qui contient (X, d) . Cet espace, noté $\mathcal{E}(X)$, s’appelle l’*enveloppe injective* de (X, d) , et a été caractérisé de plusieurs façon par Dress [26]. Pour faire le lien entre les enveloppes de Pareto en norme ℓ_∞ et les enveloppes injectives, notons d’abord que l’espace (\mathbb{R}^m, d_∞) est injectif puisque les boules sont des cubes axe-parallèles et la propriété de Helly est donc évidemment vérifiée. Par conséquent, l’enveloppe injective de l’espace métrique (T, d_∞) est un sous-espace de l’espace (\mathbb{R}^m, d_∞) et donc il existe une rétraction f de \mathbb{R}^m dans $\mathcal{E}(T)$. L’application f étant non-expansive et $T \subseteq \mathcal{E}(T)$, si un point p n’appartient pas à $\mathcal{E}(T)$ alors son image $f(p)$ a, soit le même vecteur de distances jusqu’à T que p , soit un vecteur de distance strictement meilleur. Par conséquent, l’enveloppe stricte de Pareto $\mathcal{P}_{d_\infty}^0(T)$ est incluse dans l’enveloppe injective $\mathcal{E}(T)$. D’autre part, à partir de la caractérisation de l’enveloppe injective donnée dans [43, 26], nous déduisons que $\mathcal{E}(T)$ est incluse dans $\mathcal{P}_{d_\infty}(T)$. Ces inclusions montrent que pour certains problèmes de localisation liés à la métrique ℓ_∞ , il existe des solutions optimales non seulement dans l’enveloppe de Pareto mais aussi dans l’enveloppe injective des terminaux.

En ce qui concerne les réseaux de Manhattan minimum, Gudmundsson *et al.* [36] les ont introduit en liaison avec la construction de réseaux géométriques de coût minimum approximant les distances (en anglais, ces réseaux sont connus sous le nom de *spanners*). Etant donné un ensemble T de n points de l’espace \mathbb{R}^m muni d’une norme $\|\cdot\|$ et un nombre réel $t \geq 1$, un réseau géométrique N est un *t-spanner* pour T si pour chaque paire de terminaux $p, q \in T$, il existe un (p, q) -chemin dans T de longueur au maximum t fois la distance $\|p - q\|$ entre p et q [2, 32]. Dans l’espace euclidien (et plus généralement, dans les espaces munis d’une norme ℓ_p , $p \geq 2$), le segment de droite $[p, q]$ est l’unique plus court chemin entre p et q . Par conséquent, dans ce cas, l’unique 1-spanner pour T est le graphe complet. Au contraire, si la boule unitaire est un polyèdre, en particulier c’est le cas pour les normes ℓ_1 et ℓ_∞ , p et q peuvent être connectés par plusieurs (voire un continuum) de plus courts chemins. Par conséquent, dans ce cas, le problème de calculer un 1-spanner de T devient non trivial. Dans ce contexte, notons que les réseaux de Manhattan minimum sont exactement les 1-spanners pour T dans le plan ℓ_1 (ou ℓ_∞). Les spanners géométriques ont de nombreuses applications dans le domaine de la conception de réseaux, de l’algorithmique distribuée, de la conception des circuits intégrés, etc. Il existe un grand nombre de résultats concernant les spanners. Ces résultats utilisent des techniques de la géométrie algorithmique, de l’algorithmique des graphes, des algorithmes d’approximation. Une présentation détaillée de ce domaine dépasse le cadre de cette thèse, pour une introduction à ces résultats, consulter le papier de synthèse de Eppstein [32]. Dans ce contexte, notons aussi qu’un des premiers articles consacrés à l’étude algorithmique des problèmes liés aux distances dans un espace muni d’une norme polyédrale a été celui de Widmayer, Wu et Wong [75, 76]. Finalement, signalons que Lam, Alexandersson et Pachter [50] ont montré qu’il est possible d’utiliser les réseaux de Manhattan minimum pour réduire l’espace de recherche dans des algorithmes d’alignement de séquences basés sur les chaînes de Markov cachées [50].

Deux problèmes NP-difficiles bien connus sont étroitement liés aux réseaux de Manhattan : le problème des arbres de Steiner rectilinéaires et le problème des arborescences de Steiner rec-

tilinéaires. Le problème des *arbres de Steiner rectilinéaires* consiste, étant donné un ensemble de terminaux T , à trouver un réseau rectilinéaire de longueur minimum qui connecte tous les terminaux entre eux. Evidemment, il s'agit d'un arbre. Garey et Johnson [34] montrent que ce problème est NP-difficile. Par la suite, Hwang [42] établit que le rapport entre la longueur d'un arbre couvrant de poids minimum et l'arbre de Steiner rectilinéaire minimum est au plus $\frac{3}{2}$. Zelikovsky [80] est le premier à franchir la barrière des $\frac{3}{2}$ en proposant un algorithme d'approximation avec un facteur $\frac{11}{8}$. Finalement, Arora [4] donne un schéma d'approximation en temps polynomial (PTAS) pour ce problème ainsi que pour d'autres problèmes géométriques dans le plan. Pour une synthèse complète des résultats connus pour ce problème voir l'article de Zachariasen [78]. La différence entre les réseaux de Manhattan et les arbres de Steiner réside dans le fait que l'on impose l'existence non pas seulement d'un chemin mais d'un plus court chemin entre chaque paire de terminaux. Un problème intermédiaire entre ces deux formulations est celui des arborescences rectilinéaires. Le problème des *arborescences rectilinéaires* consiste, étant donné un ensemble de terminaux T et un terminal spécifique s de cet ensemble, à trouver un réseau rectilinéaire (qui sera de nouveau un arbre) qui connecte par des plus courts chemins le terminal s à tous les autres terminaux de T . En 1985, Trubin publie un article [68] dans lequel il décrit un algorithme polynomial primal-dual (basé sur une formulation similaire à celle présentée dans cette thèse) dont il affirme qu'il résout le problème des arborescences de Steiner. Sans pouvoir comprendre les détails de cet algorithme, Rao, Sadayappan, Hwang et Shor [60] exhibent un exemple pour lequel il existe un gap d'intégralité montrant ainsi que l'algorithme de Trubin est incorrect. Ils présentent également un algorithme d'approximation avec un facteur 2 pour ce problème tout en laissant le statut de complexité ouvert. Seulement, en 2000, Shi et Su [62] montrent que ce problème est NP-difficile. Finalement, Zachariasen [78] esquisse un PTAS pour ce problème dans l'esprit de celui d'Arora pour les arbres de Steiner rectilinéaire. Un obstacle significatif pour obtenir un tel résultat dans le cas des réseaux de Manhattan est que, dans ce cas, une petite perturbation de la position des terminaux peut entraîner une variation importante du coût de la solution optimale. Ce n'est pas le cas pour les arbres et les arborescences de Steiner.

3 Plan de la thèse

La première partie de la thèse est divisée en quatre chapitres. Le chapitre 1 présente certaines notions et notations liées aux enveloppes de Pareto. Le chapitre 2 établit les différentes caractérisations concernant les enveloppes $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ et $\mathcal{P}_{d_\infty}(T)$. Le chapitre 3 présente les algorithmes de construction dans le plan, et le chapitre 4 les algorithmes de construction dans \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^m . La deuxième partie est également divisée en quatre chapitres. Le chapitre 5 présente des notions et notations concernant les réseaux de Manhattan. Le chapitre 6 établit les propriétés qui lient les réseaux de Manhattan et l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_{d_1}(T)$. Le chapitre 7 décrit la décomposition en bande-escalier. Le chapitre 8 présente la formulation en nombres entiers du problème. Pour terminer, le chapitre 9 décrit les trois algorithmes d'approximations et les résultats expérimentaux.

Première partie

Enveloppes de Pareto

Chapitre 1

Préliminaires

Nous introduisons ici les notations et les notions élémentaires que nous allons utiliser. Nous notons $T = \{t_1, \dots, t_n\}$ l'ensemble des n points de \mathbb{R}^m dont nous allons étudier l'enveloppe de Pareto. Nous appelons terminaux les points de cet ensemble afin de les distinguer des autres points de \mathbb{R}^m . Dans nos différentes notations, l'exposant représentera en général les informations concernant les coordonnées.

Coordonnée, projection et plan axe-parallèle

Pour tout point $p \in \mathbb{R}^m$ et tout indice $i \in \{1, \dots, m\}$, nous notons p^i la $i^{\text{ème}}$ coordonnée du point p , *i.e.*, $p = (p^1, \dots, p^m)$. Dans le cas particulier \mathbb{R}^3 , nous notons $p = (p^x, p^y, p^z) := (p^1, p^2, p^3)$. Pour tout sous-ensemble d'indices $I \subseteq \{1, \dots, m\}$, nous notons :

- $\bar{I} = \{i \in \{1, \dots, m\} : i \notin I\}$;
- $H^I = \{p \in \mathbb{R}^m : p^i = 0 \text{ pour tout } i \in \bar{I}\}$, *i.e.*, c'est un plan contenant uniquement les axes dont l'indice appartient à I ;
- p^I la projection orthogonale d'un point p sur le plan H^I , *i.e.*, $(p^I)^i = p^i$ si $i \in I$ et $(p^I)^i = 0$ si $i \in \bar{I}$;
- A^I la projection orthogonale d'un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^m$ sur le plan H^I .

Tout plan obtenu par une translation du plan H^I est dit *axe-parallèle*. Nous notons $D^i := H^{\{i\}}$ la droite représentant l'axe i (cette droite est orthogonale au plan $H^{\bar{\{i\}}}$). Un parallélépipède est dit axe-parallèle si ses faces sont portées par des plans axe-parallèles. De même, un demi-espace est dit axe-parallèle si il est délimité par un hyperplan axe-parallèle.

Pour tout ensemble $A \subset \mathbb{R}^m$, nous notons $\bar{A} = \{p \in \mathbb{R}^m : p \notin A\}$. Pour toute paire de points $p, q \in \mathbb{R}^m$, nous notons $[p, q]$ le segment d'extrémités p et q , $]p, q[$ le segment $[p, q]$ privé de q . Nous notons $\Delta(p, q)$ le nombre de coordonnées sur lesquelles diffèrent p et q , *i.e.*, le nombre d'indices $i \in \{1, \dots, m\}$ tel que $p^i \neq q^i$. Par définition, remarquons que $\Delta(p, q)$ est égal à la dimension du plus petit parallélépipède axe-parallèle contenant p et q .

Distance et norme

Distance. [14, 25] Une distance sur un ensemble E est une application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ tel que :

- $\forall x, y \in E, d(x, y) = 0 \iff x = y$ (définie);
- $\forall x, y \in E, d(x, y) = d(y, x)$ (symétrique);

– $\forall x, y, z \in E, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (*triangulaire*).

L'ensemble E muni d'une distance d est appelé *espace métrique*. Nous nous intéressons plus particulièrement à l'espace \mathbb{R}^m muni d'une distance induite d'une norme.

Norme. [14, 25, 67] Une norme $\|\cdot\|$ sur \mathbb{R}^m est une application de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^+ tel que :

- $\forall x \in \mathbb{R}^m, \|x\| = 0 \iff x = 0$ (*définie*);
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^m, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*triangulaire*);
- $\forall x \in \mathbb{R}^m, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (*homogène*).

Les normes les plus connues sont les ℓ_p -normes. Pour toute valeur $p \geq 1$, la norme ℓ_p est définie par $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^m |x^i|^p)^{1/p}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^m$. Parmi les différentes normes de cette famille, une attention particulière est prêtée à la norme ℓ_1 connue sous le nom de *norme de Manhattan*, la norme ℓ_2 appelée *norme euclidienne*, et la norme ℓ_∞ nommée *norme de Chebyshev* et définie par $\|x\|_\infty = \max_{i=1}^m |x^i|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^m$. Pour toute norme $\|\cdot\|$ définie sur \mathbb{R}^m , le couple $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|)$ est appelé *espace vectoriel normé*. Une distance notée d_p peut être définie à partir de chaque ℓ_p -norme. Cette distance, tel que $d_p(x, y) := \|x - y\|_p$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^m$, est appelée *distance induite* de la norme ℓ_p . Pour ce type de distances, le couple (\mathbb{R}^m, d) est appelé *espace métrique normé*. Pour toute distance d , tout point $p \in \mathbb{R}^m$ et toute valeur $r \geq 0$, nous notons $\mathcal{B}_d(p, r)$ la boule fermée de rayon r pour la distance d , i.e., $\mathcal{B}_d(p, r) := \{x \in \mathbb{R}^m : d(p, x) \leq r\}$.

Pour tout sous-ensemble d'indices $I \subseteq \{1, \dots, m\}$, nous notons $d_1^I(x, y) = \sum_{i \in I} |x^i - y^i|$. Remarquons, par définition, que $d_1(x, y) = d_1^I(x, y) + d_1^{\bar{I}}(x, y)$, et que $d_1^I(x, y) = d_1(x^I, y^I)$.

Domination, efficacité, équivalence et enveloppe de Pareto

Nous définissons à présent les notions liées à l'optimalité de Pareto dans l'espace \mathbb{R}^m muni d'une distance d quelconque.

Domination. Un point $p \in \mathbb{R}^m$ domine un point $q \in \mathbb{R}^m$ si et seulement si les deux assertions suivantes sont vérifiées :

- (i) $\forall t \in T : d(p, t) \leq d(q, t)$;
- (ii) $\exists t' \in T : d(p, t') < d(q, t')$.

Nous noterons $p \succ_T q$ le fait que p domine q par rapport à un ensemble T , et simplement $p \succ q$ en l'absence d'ambiguïté. Remarquons que la relation de domination est une relation d'ordre partiel strict (irréflexive), et qu'aucun terminal ne peut être dominé.

Efficacité. Un point $p \in \mathbb{R}^m$ est dit efficace si aucun point de l'espace ne le domine (i.e., p est un des éléments maximaux de la relation d'ordre partiel \succ_T).

Dans la littérature, un point efficace est également appelé *Pareto optimal*, *non-dominé*, ou *non-inférieur*.

Equivalence. Deux points $x, y \in \mathbb{R}^m$ sont dits équivalents par rapport à un ensemble $A \subset \mathbb{R}^m$ si et seulement si $d(x, a) = d(y, a)$ pour tout $a \in A$. Nous notons alors $x \simeq_A y$.

Enveloppe de Pareto. L'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_d(T)$ associée à un ensemble T est constituée de l'ensemble des points efficaces de l'espace \mathbb{R}^m .

Enveloppe de Pareto stricte. L'enveloppe de Pareto stricte $\mathcal{P}_d^0(T)$ associée à un ensemble T est constituée de l'ensemble des points efficaces x de l'espace \mathbb{R}^m tel $x \not\succeq_T y$ pour tout $y \in \mathbb{R}^m$.

Intervalle

Soit x, y deux points de \mathbb{R}^m et d une distance quelconque. Nous notons $I_d(x, y)$ l'ensemble des points qui réalisent l'égalité triangulaire entre x et y , *i.e.*, $I_d(x, y) = \{z \in \mathbb{R}^m : d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)\}$. Cet ensemble de points est appelé *intervalle* entre x et y pour la distance d [69]. Ces

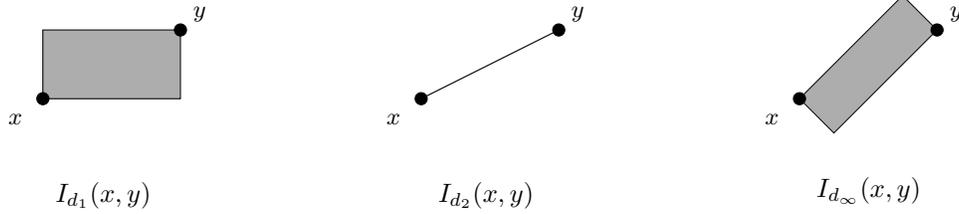


FIG. 1.1 – Les différentes formes géométriques d'un intervalle

intervalles ont des formes géométriques particulières en fonction de la distance considérée [16] (Fig. 1.1) : $I_{d_1}(x, y)$ est le parallélépipède axe-parallèle de diagonale $[x, y]$, $I_{d_2}(x, y)$ est le segment $[x, y]$, et enfin $I_{d_\infty}(x, y)$ est un rectangle de diagonale $[x, y]$ dans le plan, un octaèdre dans \mathbb{R}^3 et un hyperoctaèdre dans \mathbb{R}^m . Dans la section dédiée à l'enveloppe de Pareto associée à la distance d_∞ , nous détaillerons comment construire cet hyperoctaèdre.

Chapitre 2

Propriétés et caractérisations

Nous établissons dans ce chapitre un ensemble de propriétés et de caractérisations qui seront directement utilisées par les algorithmes de construction des enveloppes de Pareto dans les espaces métriques (\mathbb{R}^m, d_1) et (\mathbb{R}^m, d_∞) présentés dans les chapitres 3 et 4. Nous commençons par des propriétés générales qui sont vérifiées dans les deux espaces, ainsi que dans tous les espaces métriques normés. Nous poursuivons par des propriétés plus spécifiques qui dépendent de la dimension de l'espace et de la distance considérée.

2.1 Propriétés générales

Nous débutons cette section par la définition d'un ensemble, introduit dans [18], qui est toujours inclus dans l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_d(T)$ pour une distance d quelconque. Nous poursuivons par des propriétés vérifiées dans l'espace \mathbb{R}^m muni d'une distance d induite par une norme.

2.1.1 Un ensemble toujours efficace

L'ensemble $\Upsilon_d(T)$, que nous allons définir dans cette section, a été introduit par Chalmet *et al.* [18] pour caractériser l'enveloppe $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ dans le plan, et développer un algorithme de construction optimal en temps $O(n \log n)$. Il est obtenu en effectuant l'intersection d'unions d'intervalles :

$$\Upsilon_d(T) = \bigcap_{i=1}^n (\bigcup_{j=1}^n I_d(t_i, t_j)).$$

L'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_d(T)$ et l'ensemble $\Upsilon_d(T)$ coïncident dans le plan muni de la distance d_1 .

Théorème 2.1.1 [18] *Pour tout ensemble $T \subset \mathbb{R}^2$, nous avons $\mathcal{P}_{d_1}(T) = \Upsilon_{d_1}(T)$.*

Les espaces (\mathbb{R}^2, d_1) et (\mathbb{R}^2, d_∞) étant isomorphes par dilatation et rotation de $\frac{\pi}{4}$ (voir Section 2.3.1), nous déduisons le corollaire suivant.

Corollaire 2.1.1 *Pour tout ensemble $T \subset \mathbb{R}^2$, nous avons $\mathcal{P}_{d_\infty}(T) = \Upsilon_{d_\infty}(T)$.*

Nous montrerons que l'égalité $\mathcal{P}_{d_\infty}(T) = \Upsilon_{d_\infty}(T)$ est vraie dans tous les espaces (\mathbb{R}^m, d_∞) . Cependant, l'égalité entre $\mathcal{P}_d(T)$ et $\Upsilon_d(T)$ n'est pas vérifiée pour toute distance et toute dimension. L'exemple suivant, montre que ce n'est déjà plus le cas dans \mathbb{R}^3 muni de la distance d_1 .

Exemple 2.1.1 Il existe des ensembles de terminaux $T \subset \mathbb{R}^3$ tel que $\mathcal{P}_{d_1}(T) \neq \Upsilon_{d_1}(T)$.

Preuve. Considérons T l'ensemble composé des sept sommets suivants du cube unité (Fig. 2.1) : $t_1 = (0, 0, 0)$, $t_2 = (0, 0, 1)$, $t_3 = (0, 1, 0)$, $t_4 = (0, 1, 1)$, $t_5 = (1, 0, 0)$, $t_6 = (1, 0, 1)$ et $t_7 = (1, 1, 0)$. Les propriétés que nous allons établir dans cette section permettront de vérifier que l'enveloppe de Pareto de cet ensemble est le cube tout entier. Au contraire, l'ensemble $\Upsilon_{d_1}(T)$ est composé de seulement trois faces du cube unité. En particulier, nous pouvons vérifier que le point $p = (1, 1, 1)$ n'appartient pas à $\cup_{j=1}^n I_{d_1}(t_1, t_j)$. \square

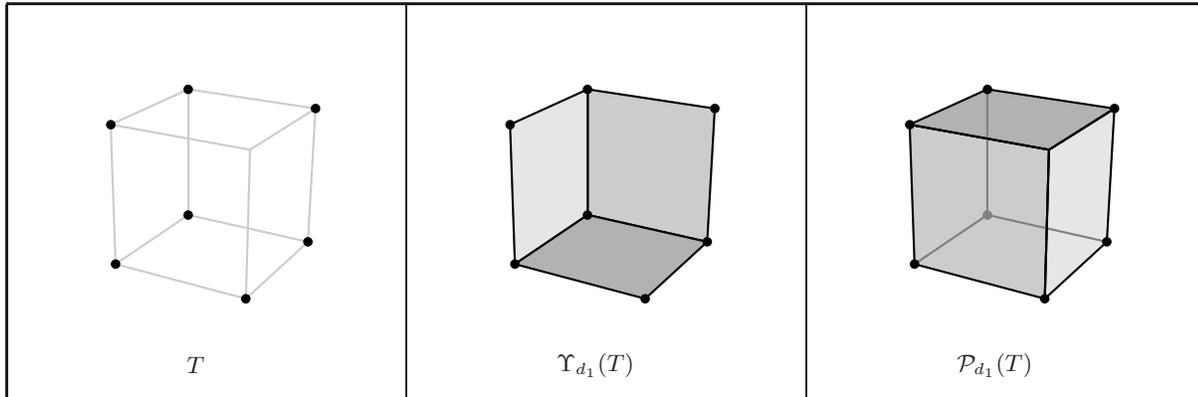


FIG. 2.1 – $\Upsilon_{d_1}(T) \neq \mathcal{P}_{d_1}(T)$ en dimension 3

Pour établir que $\mathcal{P}_{d_\infty}(T)$ coïncide avec $\Upsilon_{d_\infty}(T)$ pour tout $T \subset \mathbb{R}^m$ (ce qui montre que la caractérisation de Chalmet *et al.* [18] est plus spécifique à la distance d_∞ qu'à la distance d_1), nous utiliserons l'inclusion suivante qui est vraie pour toute distance.

Proposition 2.1.1 Pour tout $T \subset \mathbb{R}^m$ et toute distance d , nous avons $\Upsilon_d(T) \subseteq \mathcal{P}_d(T)$.

Preuve. Supposons par contradiction qu'il existe deux points $p, q \in \mathbb{R}^m$ tel que $p \succ q$ et $q \in \Upsilon_d(T)$. D'après la définition de la domination, il existe un terminal t_i pour lequel nous avons l'inégalité $d(p, t_i) < d(q, t_i)$. Comme q appartient à $\Upsilon_d(T)$, il doit également appartenir à $\cup_{j=1}^n I_d(t_i, t_j)$, et par conséquent il existe un terminal t_k tel que $q \in I_d(t_i, t_k)$. De ce fait, $d(t_i, t_k) = d(t_i, q) + d(q, t_k)$. Remarquons aussi que $d(p, t_k) \leq d(q, t_k)$ car $p \succ q$. Des égalités et inégalités précédentes, nous déduisons que $d(p, t_i) + d(p, t_k) < d(q, t_i) + d(q, t_k) = d(t_i, t_k)$. Une contradiction avec l'inégalité triangulaire pour d . \square

2.1.2 La domination proche

Soit t un point fixé de \mathbb{R}^m . Pour $x \in \mathbb{R}^m$, la fonction $f(x) = d(x, t)$ associée à une distance d induite d'une norme est *convexe* [67], dans le sens où pour tout $x, y \in \mathbb{R}^m$ et tout $\lambda \in [0, 1]$, nous avons

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Nous utilisons cette fonction, usuellement notée $d(\cdot, t)$, pour établir la propriété suivante dans l'espace \mathbb{R}^m muni d'une distance d_p induite d'une norme.

Lemme 2.1.1 (Domination proche) Soit p et q deux points d'un espace normé (\mathbb{R}^m, d_p) . Si $p \succ q$, alors $r \succ q$ pour tout point $r \in [p, q]$.

Preuve. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, posons $f_i(x) = d_p(x, t_i)$. D'après la position de r , il existe une valeur $\lambda \in]0, 1]$ tel que $r = \lambda p + (1 - \lambda)q$. La fonction $f_i(x)$ est convexe pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, par conséquent $f_i(r) \leq \lambda f_i(p) + (1 - \lambda)f_i(q)$. Etant donné que $p \succ q$, nous savons que $f_i(p) \leq f_i(q)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et qu'il existe un indice $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $f_j(p) < f_j(q)$. Par conséquent, $f_i(r) \leq \lambda f_i(q) + (1 - \lambda)f_i(q) = f_i(q)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $f_j(r) < \lambda f_j(q) + (1 - \lambda)f_j(q) = f_j(q)$, et donc $r \succ q$. \square

Remarque 2.1.1 D'après cette propriété, lorsqu'un point p domine un point q , nous pourrons choisir p aussi proche de q que nous le voulons, *i.e.*, pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, nous pourrons supposer que $d_p(p, q) < \epsilon$.

Dans nos preuves, nous nous référerons également à la propriété suivante qui découle de la notion de domination.

Lemme 2.1.2 Soit $p, q, p', q' \in \mathbb{R}^m$ tel que $d(p, t) - d(q, t) \geq d(p', t) - d(q', t)$ pour tout $t \in T$. Si $p \succ q$ alors $p' \succ q'$.

Preuve. Pour tout $t \in T$, nous avons $d(p', t) \leq d(q', t)$ si $d(p, t) \leq d(q, t)$, et $d(p', t) < d(q', t)$ si $d(p, t) < d(q, t)$. Par conséquent, $p \succ q$ implique $p' \succ q'$. \square

2.2 Enveloppe de Pareto dans l'espace (\mathbb{R}^m, d_1)

Nous établissons dans cette section les propriétés et les caractérisations des enveloppes de Pareto spécifiques à la distance d_1 . Après avoir défini certains outils géométriques, nous commençons par montrer que l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ est un complexe cubique, *i.e.*, une union de cubes. Ensuite, nous introduisons les ensembles *médians* et les ensembles *définis par projection*, respectivement notés $\mathcal{M}(T)$ et $\mathcal{I}(T)$, afin de caractériser l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ en dimension 3. Nous établissons également des propriétés locales de *domination discrète* pouvant être utilisées directement pour construire l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ pour tout $T \subset \mathbb{R}^4$.

2.2.1 Notion d'ensemble porté

Afin de manipuler la distance d_1 et l'optimalité de Pareto, nous rappelons dans cette section la notion de *porte* qui a été introduite dans le cadre d'espaces métriques généraux par A. Dress et R. Scharlau [27, 8], et qui a été ensuite employée dans la littérature pour établir plusieurs résultats [8, 69]. Nous expliquons ensuite la manière dont cet outil est utilisé dans nos différentes démonstrations.

Définition 2.2.1 (Porte) Soit d une distance, $B \subset \mathbb{R}^m$ et $a \in \mathbb{R}^m \setminus B$. Un point $p \in B$ est appelé *porte* de a dans B si $d(a, b) = d(a, p) + d(p, b)$ pour tout point $b \in B$, *i.e.*, s'il existe un plus court chemin passant par p entre a et tout point b de B .

Définition 2.2.2 (Ensemble porté) Un ensemble $B \subset \mathbb{R}^m$ est un ensemble porté si, pour tout $a \in \mathbb{R}^m \setminus B$, il existe une porte de a dans B .

Lemme 2.2.1 Un parallélépipède axe-parallèle est un ensemble porté dans l'espace (\mathbb{R}^m, d_1) . Plus généralement, pour tout $S_1 \subseteq \mathbb{R}$, $S_2 \subseteq \mathbb{R}$, \dots , $S_m \subseteq \mathbb{R}$ tel que S_i est un segment, une droite ou une demi-droite, le produit cartésien $\Pi = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_m = \{(x_1, \dots, x_m) : x_i \in S_i\}$ est un ensemble porté de l'espace (\mathbb{R}^m, d_1) .

Preuve. Il est évident que $S_i \subseteq \mathbb{R}$ est un ensemble porté pour la distance d_1 car, pour tout point $a_i \in \mathbb{R} \setminus S_i$, nous remarquons que l'une des extrémités de S_i est la porte de a_i dans S_i . Considérons un point $a = (a_1, \dots, a_m)$ de \mathbb{R}^m , et le point $p = (p_1, \dots, p_m)$ tel que p_i est la porte de a_i dans S_i . Pour montrer que Π est un ensemble porté, il suffit de montrer que p est la porte de a dans Π . Pour tout $b = (b_1, \dots, b_m) \in \Pi$, nous savons que $d_1(a_i, b_i) = d_1(a_i, p_i) + d_1(p_i, b_i)$ car $b_i \in S_i$, d'après la définition du produit cartésien. Par conséquent, nous concluons que p est la porte de a dans Π car, pour tout $b \in \Pi$, nous avons

$$d_1(a, b) = \sum_{i=1}^m d_1(a_i, b_i) = \sum_{i=1}^m d_1(a_i, p_i) + \sum_{i=1}^m d_1(p_i, b_i) = d_1(a, p) + d_1(p, b).$$

□

Pour chaque sommet p d'un parallélépipède axe-parallèle Π , nous appelons *orthant* de Π porté par p , noté $\text{Ort}(\Pi, p)$, l'ensemble de tous les points $a \in \mathbb{R}^m$ tel que p est la porte de a dans Π . Par définition, le point $p \in I_{d_1}(a, b)$ pour tout $a \in \text{Ort}(\Pi, p)$ et tout $b \in \Pi$. De plus, le point p est la porte dans $\text{Ort}(\Pi, p)$ de tout point $b \in \Pi$. Géométriquement, l'orthant $\text{Ort}(\Pi, p)$ est un polyèdre non borné délimité par un ensemble d'hyperplans axe-parallèles orthogonaux passant par p . D'après le Lemme 2.2.1, comme $\text{Ort}(\Pi, p)$ est le produit cartésien de droites et demi-droites, nous pouvons remarquer que l'orthant $\text{Ort}(\Pi, p)$ est un ensemble porté. Sur la Figure 2.2, les zones grisées représentent l'orthant $\text{Ort}(\Pi, p)$ pour des parallélépipèdes de dimension un, deux et trois. Par la suite, nous dirons que l'orthant $\text{Ort}(\Pi, p)$ est *vide* s'il ne contient pas de terminal, i.e., si $\text{Ort}(\Pi, p) \cap T = \emptyset$.

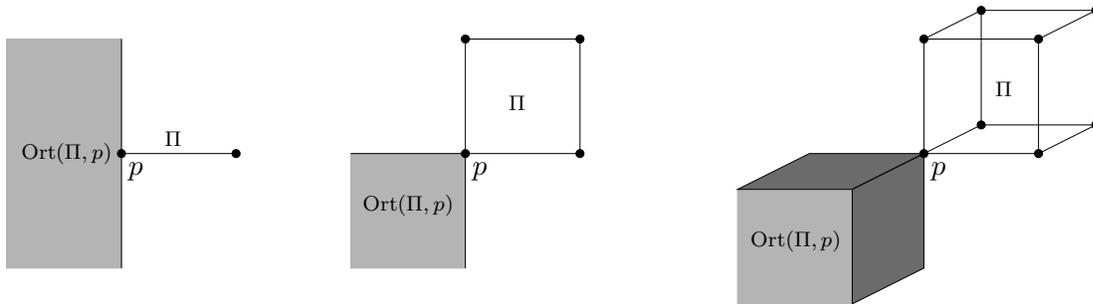


FIG. 2.2 – Un orthant

Voici deux propriétés qui lient les notions de domination et d'ensemble porté.

Lemme 2.2.2 Soit p, q deux points appartenant à un parallélépipède axe-parallèle Π , et s un sommet de celui-ci. Si $p \succ q$ et $\text{Ort}(\Pi, s) \cap T \neq \emptyset$, alors $d_1(p, s) \leq d_1(q, s)$.

Preuve. Soit t un terminal appartenant à $\text{Ort}(\Pi, s)$. Comme s est la porte de p et de q dans $\text{Ort}(\Pi, s)$, nous avons $d_1(p, t) = d_1(p, s) + d_1(s, t)$ et $d_1(q, t) = d_1(q, s) + d_1(s, t)$. Etant donné que $d_1(p, t) \leq d_1(q, t)$, nous obtenons $d_1(p, s) + d_1(s, t) \leq d_1(q, s) + d_1(s, t)$, et donc que $d_1(p, s) \leq d_1(q, s)$. \square

Lemme 2.2.3 *Soit p, q deux points appartenant à un parallélépipède axe-parallèle Π de diagonale $[r, s]$. Si $p \succ q$, $\text{Ort}(\Pi, r) \cap T \neq \emptyset$ et $\text{Ort}(\Pi, s) \cap T \neq \emptyset$, alors $p \simeq_{T'} q$ pour $T' = (\text{Ort}(\Pi, r) \cup \text{Ort}(\Pi, s)) \cap T$.*

Preuve. D'après le Lemme 2.2.2, nous déduisons que $d_1(p, r) \leq d_1(q, r)$ et $d_1(p, s) \leq d_1(q, s)$. Comme $p, q \in I_{d_1}(r, s)$, nous avons $d_1(r, s) = d_1(r, p) + d_1(p, s) = d_1(r, q) + d_1(q, s)$. Par conséquent, $d_1(r, p) = d_1(r, q)$ et $d_1(s, p) = d_1(s, q)$. Si un terminal t appartient à $\text{Ort}(\Pi, r) \cup \text{Ort}(\Pi, s)$, nous concluons que $d_1(p, t) = d_1(q, t)$, et donc que $p \simeq_{T'} q$. \square

2.2.2 Un complexe cubique

Dans [28, 29], Durier et Michelot introduisent la notion d'ensemble convexe élémentaire. Un *ensemble convexe élémentaire* est un ensemble fermé convexe de \mathbb{R}^m qui peut s'écrire comme l'intersection de cônes générés par les faces de la boule unitaire centrée dans un terminal. Ils montrent que, pour toute norme polyédrale, l'espace peut être partitionné en cellules qui sont des convexes élémentaires et que l'enveloppe de Pareto est une union connexe et finie de telles cellules. Dans cette section, nous définissons la *grille rectilinéaire* (dite aussi *grille de Hanan* [79]) engendrée par un ensemble de terminaux $T \subset \mathbb{R}^m$ (Fig. 2.3). Cette grille, qui correspond exactement à la partition introduite par Durier et Michelot pour la distance d_1 , est composée de cellules élémentaires en forme de cube. Après avoir défini cette grille, nous montrons que l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ est un *complexe cubique conforme*, *i.e.*, une union de cellules élémentaires cubiques ayant une propriété supplémentaire de *conformité* que nous définirons par la suite. Dans la littérature, plusieurs ensembles de ce type ont été étudiés [8, 10]. Nous pouvons par exemple citer les complexes médians définis dans la Section 2.2.5.

Dans le plan, la *grille rectilinéaire* $G(T)$ est définie par les droites horizontales et verticales passant par chacun des terminaux (Fig. 2.3). Plus généralement dans \mathbb{R}^m , la grille $G(T)$ est définie par la famille des hyperplans axe-parallèles contenant au moins un terminal. Notons qu'il existe au plus mn hyperplans de ce type. Un point $p \in \mathbb{R}^m$ est un *sommet* de cette grille, s'il appartient à m hyperplans de cette famille. Par définition, nous pouvons remarquer qu'un point p est un sommet de la grille *si, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, il existe un terminal t tel que $p^i = t^i$* . Deux sommets p et q sont dits *voisins* dans la grille, si $[p, q]$ est un segment axe-parallèle qui ne contient pas d'autre sommet de la grille. Un parallélépipède axe-parallèle Π est une *cellule (élémentaire)* de $G(T)$ si les extrémités de chacune des arêtes de Π sont des sommets voisins dans la grille. Il existe des cellules de différentes dimensions. Par exemple, dans le plan, une cellule est soit un point, soit un segment, soit un rectangle. Nous dirons qu'une grille rectilinéaire est *unitaire*, si la distance entre chaque paire de voisins est égale à 1.

Remarque 2.2.1 Par définition, pour toute cellule Π de la grille $G(T)$ et pour tout terminal $t \in T$, nous pouvons remarquer *qu'il existe un unique sommet p de Π tel que $t \in \text{Ort}(\Pi, p)$* .

Un ensemble $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^m$ est un *complexe cubique* de la grille $G(T)$ si il est l'union de cellules de la grille $G(T)$. Une *complexe cubique conforme* de la grille $G(T)$ est un complexe cubique

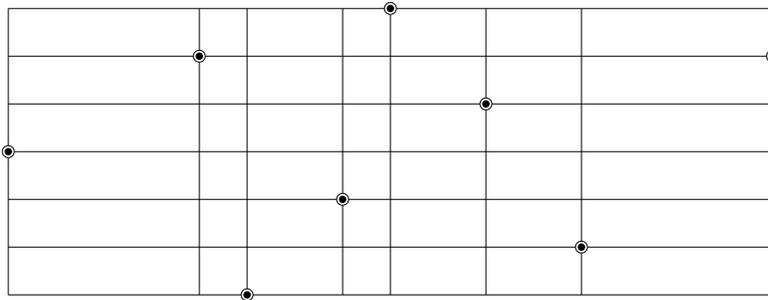


FIG. 2.3 – La grille rectilinéaire $G(T)$

tel que si tous les sommets d'une cellule Π appartiennent à \mathcal{C} , alors Π appartient complètement à \mathcal{C} . Nous pouvons remarquer que le complexe cubique représenté en grisé sur la Figure 2.4.(a) n'est pas conforme car certaines cellules ne vérifient pas cette propriété de conformité.

Afin de montrer que $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ est un complexe cubique conforme de $G(T)$, nous allons d'abord montrer que l'enveloppe $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ est incluse dans le plus petit parallélépipède axe-parallèle $\Pi(T)$ contenant l'ensemble T (Fig. 2.4.(b)), puis établir plusieurs propriétés intermédiaires.

Lemme 2.2.4 Pour tout $T \subset \mathbb{R}^m$, nous avons $\mathcal{P}_{d_1}(T) \subseteq \Pi(T)$.

Preuve. Il suffit de montrer que tout point $q \in \mathbb{R}^m \setminus \Pi(T)$ est dominé. Notons q' la porte de q dans $\Pi(T)$. Comme $d_1(q, t) = d_1(q, q') + d_1(q', t)$ pour tout terminal $t \in T$ et $q \neq t$, nous déduisons que $q' \succ q$ et donc que $q \notin \mathcal{P}_{d_1}(T)$. \square

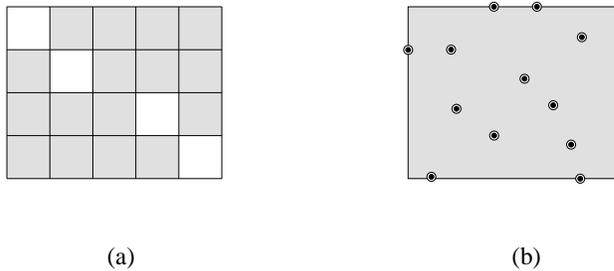


FIG. 2.4 – Un complexe cubique et $\Pi(T)$

Remarque 2.2.2 D'après la preuve de ce lemme, nous pouvons noter que si un point $q \notin \mathcal{P}_{d_1}(T)$, alors il existe toujours un point $p \in \Pi(T)$ tel que $p \succ q$. Par la suite, quand nous dirons qu'un point p domine un point q , nous supposons toujours que p appartient à $\Pi(T)$. Pour cette raison, nous pourrions également supposer que p appartient à une cellule de la grille $G(T)$.

Nous allons maintenant montrer une propriété qui permet de déterminer quels sont les points n'appartenant pas à l'enveloppe $\mathcal{P}_{d_1}(T)$, dans le cas où nous savons uniquement qu'un point p domine un point q . Pour cela, nous utilisons le lemme auxiliaire suivant.

Lemme 2.2.5 Si $p, q, \delta \in \mathbb{R}$ tel que $p \geq q$ et $\delta \leq 0$, alors $|p| - |q| \geq |p + \delta| - |q + \delta|$.

Preuve. Posons $f := |p + \delta| - |q + \delta| - |p| + |q|$. Il suffit de montrer que dans tous les cas $f \leq 0$. En effet,

- si $p \geq q \geq -\delta \geq 0$ alors $f = p + \delta - q - \delta - p + q = 0$;
- si $p \geq -\delta \geq q \geq 0$ alors $f = p + \delta + q + \delta - p + q = 2q + 2\delta \leq 0$;
- si $-\delta \geq p \geq q \geq 0$ alors $f = -p - \delta + q + \delta - p + q = 2q - 2p \leq 0$;
- si $p \geq -\delta \geq 0 \geq q$ alors $f = p + \delta + q + \delta - p - q = 2\delta \leq 0$;
- si $-\delta \geq p \geq 0 \geq q$ alors $f = -p - \delta + q + \delta - p - q = -2p \leq 0$;
- si $-\delta \geq 0 \geq p \geq q$ alors $f = -p - \delta + q + \delta + p - q = 0$.

□

Lemme 2.2.6 (Orthant dominé) Soit $p, q \in \mathbb{R}^m$ et soit Π le parallélépipède axe-parallèle de diagonale $[p, q]$. Si $p \succ q$, alors $\text{Ort}(\Pi, q) \cap \mathcal{P}_{d_1}(T) = \emptyset$.

Preuve. Il suffit de montrer que tout point $q' \in \text{Ort}(\Pi, q)$ est dominé. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $q'^i \leq q^i \leq p^i$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$. Soit p' le translaté de p par le vecteur $\overrightarrow{qq'}$ (Fig. 2.5). Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, nous avons donc $p'^i = p^i + (q'^i - q^i)$. Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ et pour tout $t \in T$, nous déduisons d'après le Lemme 2.2.5 que :

$$\begin{aligned} |p^i - t^i| - |q^i - t^i| &\geq |p^i - t^i + (q'^i - q^i)| - |q^i - t^i + (q'^i - q^i)| \\ &\geq |p'^i - t^i| - |q'^i - t^i|. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} d_1(p, t) - d_1(q, t) &= \sum_{i=1}^m |p^i - t^i| - \sum_{i=1}^m |q^i - t^i| \\ &= \sum_{i=1}^m (|p^i - t^i| - |q^i - t^i|) \\ &\geq \sum_{i=1}^m (|p'^i - t^i| - |q'^i - t^i|) \\ &\geq \sum_{i=1}^m |p'^i - t^i| - \sum_{i=1}^m |q'^i - t^i| \\ &\geq d_1(p', t) - d_1(q', t) \end{aligned}$$

D'après le Lemme 2.1.2, nous concluons que $p' \succ q'$. □

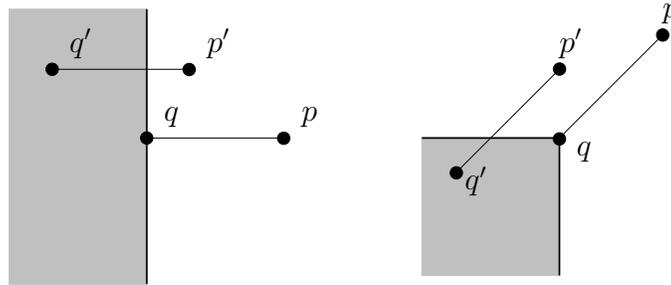


FIG. 2.5 – Orthant dominé

Sur la Figure 2.5, les zones grisées représentent les points n'appartenant pas à $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ dans le cas où $p \succ q$. Pour un point q' appartenant à cette zone, le point p' qui domine q' est également représenté.

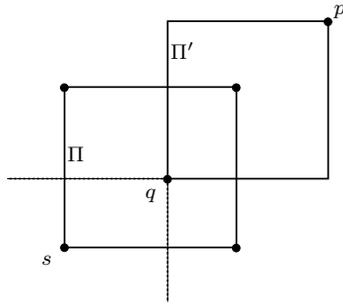


FIG. 2.6 – Illustration du Lemme 2.2.7

Lemme 2.2.7 Soit $T \subset \mathbb{R}^m$. Si tous les sommets d'un parallélépipède axe-parallèle Π appartiennent à $\mathcal{P}_{d_1}(T)$, alors Π appartient à $\mathcal{P}_{d_1}(T)$.

Preuve. Supposons par contradiction qu'il existe deux points p, q tel que $q \in \Pi$ et $p \succ q$. Soit Π' le parallélépipède axe-parallèle de diagonale $[p, q]$ (Fig. 2.6). Comme $q \in \Pi$, il existe nécessairement un sommet s de Π appartenant à $\text{Ort}(\Pi', s)$. D'après le lemme de l'orthant dominé, nous déduisons que s est dominé, ce qui contredit l'hypothèse. \square

Comme Durier et Michelot [28, 29] ont montré que $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ est un complexe cubique de la grille $G(T)$, nous déduisons du Lemme 2.2.7 que c'est un complexe cubique conforme.

Proposition 2.2.1 (Complexe cubique conforme $\mathcal{P}_{d_1}(T)$) Pour tout $T \subset \mathbb{R}^m$, l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ est un complexe cubique conforme de la grille $G(T)$.

Avant de passer à la suite, nous établissons deux propriétés qui nous permettront de raisonner sur les complexes cubiques conformes, puis nous montrons que $\Upsilon_{d_1}(T)$ en est un.

Lemme 2.2.8 L'intersection de plusieurs complexes cubiques conformes de la grille $G(T)$ forme également un complexe cubique conforme de la grille $G(T)$.

Preuve. Par induction, il suffit de montrer que la propriété est vraie pour deux complexes cubiques conformes \mathcal{C} et \mathcal{C}' . Il est évident que l'intersection de \mathcal{C} et \mathcal{C}' est une union de cellules de la grille. Si nous considérons une cellule Π dont tous les sommets appartiennent à $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$, nous déduisons que $\Pi \subseteq \mathcal{C}$ et $\Pi \subseteq \mathcal{C}'$ car les deux ensembles sont des complexes cubiques conformes. Par conséquent, nous concluons que $\Pi \subseteq \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$, et donc que $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ est un complexe cubique conforme. \square

Lemme 2.2.9 Soit \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux complexes cubiques conformes de la grille $G(T)$. Si tous les sommets de la grille $G(T)$ appartenant à \mathcal{C} appartiennent également à \mathcal{C}' , alors \mathcal{C} est inclus dans \mathcal{C}' .

Preuve. Etant donné que \mathcal{C} est une union de cellules, il suffit de montrer que si Π est une cellule de la grille $G(T)$ appartenant à \mathcal{C} , alors Π appartient également à \mathcal{C}' . Si nous montrons que tous les sommets de Π appartiennent à \mathcal{C}' , nous déduisons que Π appartient complètement à l'ensemble \mathcal{C}' car c'est un complexe cubique conforme. \square

Proposition 2.2.2 (Complexe cubique conforme $\Upsilon_{d_1}(T)$) Pour tout $T \subset \mathbb{R}^m$, l'ensemble $\Upsilon_{d_1}(T)$ est un complexe cubique conforme de la grille $G(T)$.

Preuve. D'après la définition de $\Upsilon_{d_1}(T)$ et le Lemme 2.2.8, il suffit de montrer que $\cup_{i=1}^n I_{d_1}(t, t_i)$ est un complexe cubique conforme pour tout terminal t . Comme un intervalle entre deux terminaux est une union de cellules de la grille $G(T)$, nous déduisons que $\cup_{i=1}^n I_{d_1}(t, t_i)$ est également une union de cellules de la grille. Il reste donc à montrer que si tous les sommets d'une cellule Π appartiennent à $\cup_{i=1}^n I_{d_1}(t, t_i)$, alors $\Pi \subseteq \cup_{i=1}^n I_{d_1}(t, t_i)$. Soit s un sommet de Π tel que $t \in \text{Ort}(\Pi, s)$ et soit s' le sommet diagonalement opposé à s dans Π . Comme s' appartient à $\cup_{i=1}^n I_{d_1}(t, t_i)$, nous déduisons qu'il existe un terminal t' appartenant à $\text{Ort}(\Pi, s')$. Nous concluons que $\Pi \subseteq \cup_{i=1}^n I_{d_1}(t, t_i)$ car $\Pi \subseteq I_{d_1}(t, t')$. \square

2.2.3 Etude dans la grille unitaire

Nous allons montrer que nous pouvons nous restreindre, sans perte de généralité, à l'étude de $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ pour des ensembles de terminaux engendrant une grille rectilinéaire unitaire. Cette propriété permettra de passer d'une étude continue à une étude discrète via la notion de complexe cubique conforme et la notion de *domination discrète* définie dans la Section 2.2.4.

Soit $T = \{t_1, \dots, t_n\}$ et $T' = \{t'_1, \dots, t'_n\}$ deux ensembles de terminaux de \mathbb{R}^m tel que T' est l'image de T par une transformation isotone coordonnée-par-coordonnée notée ϕ (Fig 2.7), *i.e.*, pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$ et tout $k \in \{1, \dots, m\}$:

- $t_i^k < t_j^k$ si et seulement si $t'_i{}^k < t'_j{}^k$;
- $t_i^k = t_j^k$ si et seulement si $t'_i{}^k = t'_j{}^k$.

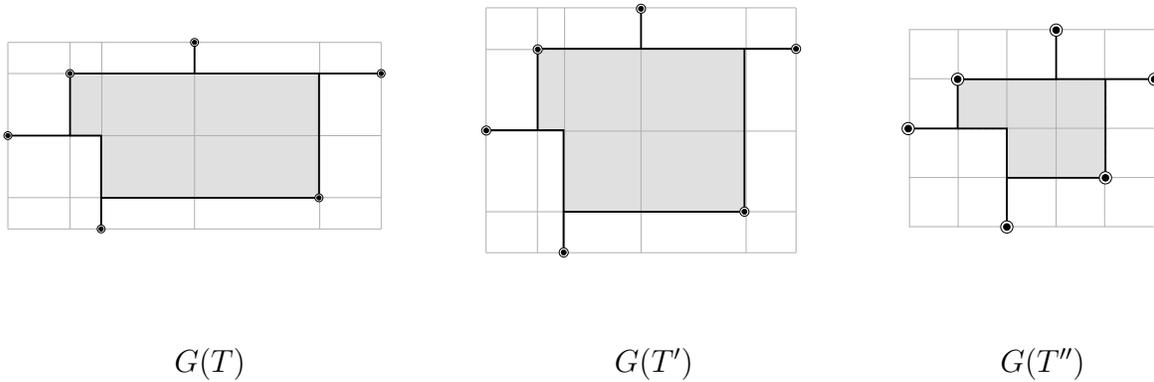


FIG. 2.7 – Equivalence par une transformation isotone

Lemme 2.2.10 Pour tout sommet q de $G(T)$ et tout sommet q' de $G(T')$ tel que $q' = \phi(q)$, nous avons $q \in \mathcal{P}_{d_1}(T)$ si et seulement si $q' \in \mathcal{P}_{d_1}(T')$.

Preuve. Il suffit de montrer que si $q \notin \mathcal{P}_{d_1}(T)$ alors $q' \notin \mathcal{P}_{d_1}(T')$. Considérons T et T' dans un repère où q et q' sont confondus. Notons p le point tel que $p \succ_T q$, et Π le parallélépipède axe-parallèle de diagonale $[p, q]$. D'après le lemme de la domination proche, nous pouvons supposer, pour tout terminal $t \in (T \cup T')$, qu'il existe un sommet s de Π tel que $t \in \text{Ort}(\Pi, s)$. Nous

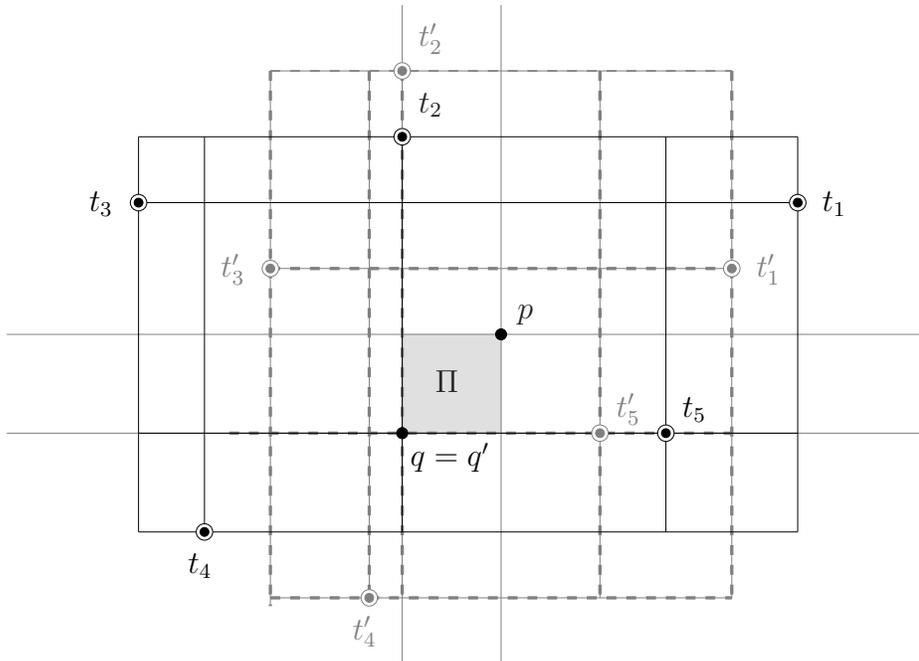


FIG. 2.8 – Illustration du Lemme 2.2.10

allons montrer que $p \succ_{T'} q$. Considérons un terminal $t_i \in T$ et son image $t'_i \in T'$. D'après la définition de T , T' et Π , remarquons qu'il existe un sommet s de Π tel que $t_i, t'_i \in \text{Ort}(\Pi, s)$. Comme $d_1(p, t) - d_1(q, t) = d_1(p, s) - d_1(q, s)$ pour tout $t \in \text{Ort}(\Pi, s)$, nous déduisons que $d_1(p, t_i) - d_1(q, t_i) = d_1(p, t'_i) - d_1(q, t'_i)$. Nous concluons que $p \succ_{T'} q$, et donc que $p \succ_{T'} q'$ car q et q' sont confondus. \square

Soit T'' l'image de T par une transformation isotone coordonnée-par-coordonnée tel que T'' engendre une grille unitaire (Fig. 2.7). D'après le Lemme 2.2.10, si nous savons déterminer les sommets de la grille $G(T'')$ appartenant à $\mathcal{P}_{d_1}(T'')$, alors nous savons également déterminer les sommets de la grille $G(T)$ appartenant $\mathcal{P}_{d_1}(T)$. Par la suite, en s'appuyant sur cette propriété, nous supposons dans certaines preuves, sans perte de généralité, que la grille engendrée par l'ensemble T est unitaire.

2.2.4 Domination discrète

Le lemme de l'orthant dominé permet de déterminer un ensemble de points n'appartenant pas à $\mathcal{P}_{d_1}(T)$, quand nous savons uniquement qu'un point q est dominé. A l'inverse, dans cette section, nous allons chercher à savoir quels sont les points pouvant dominer un point q n'appartenant pas à $\mathcal{P}_{d_1}(T)$. En termes plus algorithmiques, nous allons chercher à savoir quels points tester pour savoir si un point q n'appartient pas à $\mathcal{P}_{d_1}(T)$. Les propriétés énoncées vont nous permettre de passer de la notion de domination continue à une notion de *domination discrète*.

Nous savons que l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ est un complexe cubique conforme, et que nous pouvons nous restreindre sans perte de généralité à l'étude de $\mathcal{P}_1(T)$ pour un ensemble de terminaux engendrant une grille unitaire. Pour ces deux raisons, nous allons essentiellement nous intéresser à savoir quels sont les points pouvant dominer un sommet q d'une grille unitaire.

Lemme 2.2.11 Soit $T \subset \mathbb{R}^m$. Si un point p domine un point $q \in \Pi(T)$, alors $\Delta(p, q) > 1$.

Preuve. Supposons le contraire et notons Π le segment axe-parallèle $[p, q]$. Comme $q \in \Pi(T)$, il existe nécessairement un terminal t appartenant à $\text{Ort}(\Pi, q)$. Comme q est la porte de p dans $\text{Ort}(\Pi, q)$, nous déduisons que t est plus proche de q que de p . Ce qui est une contradiction avec le fait que p domine q . \square

Lemme 2.2.12 Soit $T \subset \mathbb{R}^m$ tel que $G(T)$ est une grille unitaire. Si un sommet q de $G(T)$ est dominé par un point p tel que $\Delta(p, q) \leq 3$, alors il est également dominé par un sommet p' de $G(T)$ tel que $\Delta(p', q) = 2$ et $d_\infty(p', q) = 1$.

Preuve. D'après la Lemme 2.2.11, il est impossible que $\Delta(p, q) = 1$. Il reste donc à considérer les deux cas suivants : (1) $\Delta(p, q) = 2$, et (2) $\Delta(p, q) = 3$. Voici la preuve du lemme pour chacun de ces cas :

1. Pour ce premier cas, nous nous référons à la Figure 2.9. D'après le lemme de la domination proche, nous pouvons supposer que $d_1(p, q) < 1$. Soit Π la cellule de la grille de plus petite dimension contenant p et q . Cette cellule existe car $d_1(p, q) < 1$ et elle est de dimension 2 car $\Delta(p, q) = 2$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que p et q diffèrent seulement sur les deux premières coordonnées. Notons a, b et c les trois autres sommets de Π tel que $[b, q]$ soit une diagonale de Π . Nous allons montrer que q est dominé par b . Comme q est la porte de p dans $\text{Ort}(\Pi, q)$, nous avons $\text{Ort}(\Pi, q) \cap T = \emptyset$. Etant donné que q est un sommet de la grille, il existe $t, t' \in T$ tel que $t^1 = q^1$ et $t'^2 = q^2$. Comme $\text{Ort}(\Pi, q)$ est vide, nous avons nécessairement $t \in \text{Ort}(\Pi, a)$ et $t' \in \text{Ort}(\Pi, c)$. Par conséquent, $\text{Ort}(\Pi, a) \cap T \neq \emptyset$ et $\text{Ort}(\Pi, c) \cap T \neq \emptyset$. Comme $p, q \in I_{d_1}(a, c)$, nous déduisons d'après le Lemme 2.2.3 que $p \simeq_{T'} q$ pour $T' = (\text{Ort}(\Pi, a) \cup \text{Ort}(\Pi, c)) \cap T$. Comme $p \succ q$, le terminal qui est plus proche de p que de q doit donc nécessairement appartenir à $\text{Ort}(\Pi, b)$, et par conséquent $\text{Ort}(\Pi, b) \cap T \neq \emptyset$. Comme la grille est unitaire, nous avons $q \simeq_{T'} b$. De plus, comme b est la porte de q dans $\text{Ort}(\Pi, b)$, nous avons $d(b, t) < d(q, t)$ pour tout $t \in \text{Ort}(\Pi, b)$. Nous concluons que $b \succ q$.

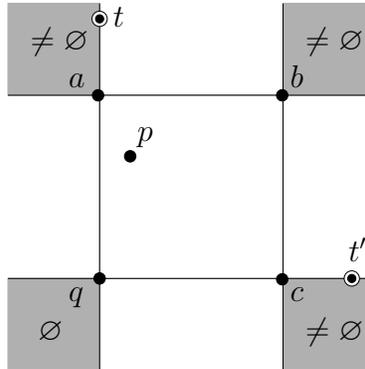


FIG. 2.9 – Illustration du Lemme 2.2.12

2. Pour ce deuxième cas, nous nous référons à la Figure 2.10. D'après le lemme de la domination proche, nous pouvons supposer que $d_1(p, q) < 1$. Soit Π la plus petite cellule de la grille contenant p et q . Cette cellule existe car $d_1(p, q) < 1$ et elle est de dimension 3 car

$\Delta(p, q) = 3$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que p et q diffèrent seulement sur les trois premières coordonnées. Posons $\delta_i := |p^i - q^i|$ pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$. Sans perte de généralité, nous pouvons également supposer que $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \delta_3 > 0$. Notons a, b, c, d, e, f et g les sept autres sommets de la cellule Π . Nous allons montrer que q est dominé par le point a, c ou f . Comme q est la porte de p dans $\text{Ort}(\Pi, q)$, nous avons $\text{Ort}(\Pi, q) \cap T = \emptyset$. Les points de $\text{Ort}(\Pi, e)$ et de $\text{Ort}(\Pi, d)$ sont plus proches de q que de p car :

$$\begin{aligned} d_1(p, e) &= \delta_1 + \delta_2 + (1 - \delta_3) \geq \delta_1 + \delta_2 + (1 - \delta_2) > 1 = d_1(q, e), \\ d_1(p, d) &= \delta_1 + (1 - \delta_2) + \delta_3 \geq \delta_1 + (1 - \delta_1) + \delta_2 > 1 = d_1(q, d). \end{aligned}$$

Par conséquent, $\text{Ort}(\Pi, e) \cap T = \emptyset$ et $\text{Ort}(\Pi, d) \cap T = \emptyset$. Etant donné que q est un sommet de la grille, il existe $t' \in T$ tel que $t'^1 = q^1$. Comme

$$(\text{Ort}(\Pi, d) \cup \text{Ort}(\Pi, e) \cup \text{Ort}(\Pi, q)) \cap T = \emptyset,$$

nous avons nécessairement $t' \in \text{Ort}(\Pi, a)$. Par conséquent, $\text{Ort}(\Pi, a) \cap T \neq \emptyset$. Dans le cas où $\text{Ort}(\Pi, g) \cap T = \emptyset$, nous concluons que $a \succ q$, car pour tout $t \in \text{Ort}(\Pi, b) \cup \text{Ort}(\Pi, c) \cup \text{Ort}(\Pi, f)$ nous avons $d_1(a, t) \leq d_1(q, t)$, et $d_1(a, t) < d_1(q, t)$ pour tout $t \in \text{Ort}(\Pi, a)$. Il reste donc à traiter le cas où $\text{Ort}(\Pi, g) \cap T \neq \emptyset$. Comme $p, q \in I_{d_1}(a, g)$, nous déduisons d'après le Lemme 2.2.3 que $p \simeq_{T'} q$ pour $T' = (\text{Ort}(\Pi, a) \cup \text{Ort}(\Pi, g)) \cap T$. Comme $p \succ q$, le terminal plus proche de p que de q doit donc nécessairement appartenir à $\text{Ort}(\Pi, b) \cup \text{Ort}(\Pi, c) \cup \text{Ort}(\Pi, f)$. A l'aide du même raisonnement que nous avons utilisé pour montrer que $a \succ q$, nous concluons que $c \succ q$ si ce terminal appartient à $\text{Ort}(\Pi, b) \cup \text{Ort}(\Pi, c)$, et que $f \succ q$ si ce terminal appartient à $\text{Ort}(\Pi, b) \cup \text{Ort}(\Pi, f)$. Dans tous les cas, nous obtenons que q est dominé par un point qui satisfait les conditions de notre proposition.

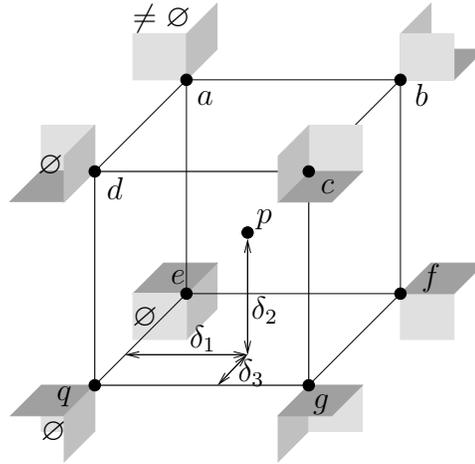


FIG. 2.10 – Illustration du Lemme 2.2.12

□

Cette propriété, qui est vraie dans \mathbb{R}^m , nous permet de savoir quels points tester pour déterminer si un sommet q de la grille unitaire est dominé quand T est une ensemble de terminaux de \mathbb{R}^2 .

Corollaire 2.2.1 (Domination discrète \mathbb{R}^2) Soit $T \subset \mathbb{R}^2$ tel que $G(T)$ est une grille unitaire et q un sommet de la grille. Soit V l'ensemble des sommets v de la grille $G(T)$ tel que $\Delta(v, q) = 2$ et $d_\infty(v, q) = 1$. Alors, nous avons $q \notin \mathcal{P}_{d_1}(T)$ si et seulement si il existe un sommet $v' \in V$ tel que $v' \succ q$.

Preuve. Supposons que q est dominé par un point p . D'après la Remarque 2.2.2, nous pouvons supposer que $p \in \Pi(T)$ et donc que $\Delta(p, q) \leq 2$. Comme $q \in \Pi(T)$, d'après le Lemme 2.2.11, nous déduisons que $\Delta(p, q) = 2$. D'après le Lemme 2.2.12, nous concluons que q est dominé par un sommet $v \in V$. \square

Sur la Figure 2.11, pour un sommet q de la grille $G(T)$, nous avons représenté les quatre cellules de dimension 2 voisines de q , et les quatre sommets, notés v_1, v_2, v_3 et v_4 , à tester pour déterminer si q appartient à $\mathcal{P}_{d_1}(T)$. Notons qu'il faut tester moins de quatre sommets si q appartient à la frontière de la grille.

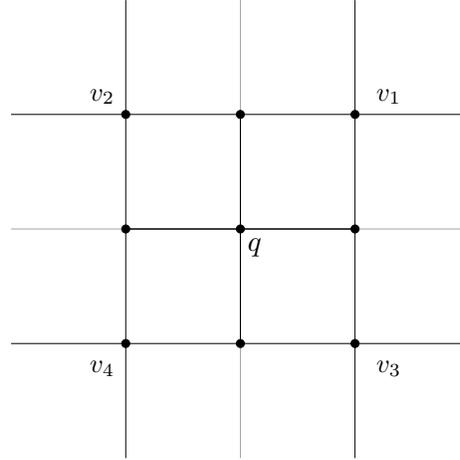


FIG. 2.11 – La domination discrète quand $\Delta(p, q) = 2$

Pour tout ensemble de terminaux de \mathbb{R}^3 , la propriété de domination discrète est également vérifiée. Cependant, celle-ci est un peu différente car si q est dominé, alors il existe un point p qui le domine tel que $\Delta(p, q)$ est égal à 2 et non pas à 3. Cette propriété est à l'origine de l'égalité dans \mathbb{R}^3 entre $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ et l'ensemble $\mathcal{I}(T)$ que nous introduirons dans la Section 2.2.6.

Corollaire 2.2.2 (Domination discrète \mathbb{R}^3) Soit $T \subset \mathbb{R}^3$ tel que $G(T)$ est une grille unitaire et q un sommet de la grille. Soit V l'ensemble des sommets v de la grille $G(T)$ tel que $\Delta(v, q) = 2$ et $d_\infty(v, q) = 1$. Alors, nous avons $q \notin \mathcal{P}_{d_1}(T)$ si et seulement si il existe un sommet $v' \in V$ tel que $v' \succ q$.

Preuve. La démonstration est similaire à celle du lemme de la domination discrète dans \mathbb{R}^2 . \square

Remarque 2.2.3 Pour l'Exemple 2.1.1, la domination discrète dans \mathbb{R}^3 permet de déduire que le sommet $p = (1, 1, 1)$ du cube unité, qui n'appartient pas à $\Upsilon_{d_1}(T)$, appartient à $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ car aucun sommet du cube ne le domine. Par conséquent, comme tous les sommets du cube appartiennent à l'enveloppe $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ et que celle-ci est un complexe cubique conforme, nous déduisons que tous les points du cube appartiennent à cette enveloppe.

L'exemple qui suit montre que la propriété de domination discrète n'est pas vraie dans \mathbb{R}^5 . Au contraire, en utilisant la même méthode de preuve que dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 , nous pouvons montrer que la propriété est vraie dans \mathbb{R}^4 .

Exemple 2.2.1 Soit $T \subset \mathbb{R}^5$ tel que $G(T)$ est une grille unitaire et q un sommet de la grille. Alors, q n'est pas forcément dominé par un sommet p' de la grille unitaire.

Preuve. Soit $q = (0, 0, 0, 0, 0)$, $p = (1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, et T l'ensemble composé des sommets t de l'hypercube de dimension 5 tel que $d_1(p, t) \leq d_1(q, t)$. Le point p domine q car p est plus proche que q du sommet $t' = (1, 1, 1, 1, 1)$. Par contre, pour tout sommet p' du cube unité, il est possible de vérifier que q n'est pas dominé par p' . \square

2.2.5 Ensembles médians

Les structures médianes apparaissent de façon indépendante en mathématiques discrètes [5, 8, 55, 54, 56], algèbre universelle [3, 11, 44], géométrie [19, 69, 70] et optimisation [6, 45] en tant qu'objets de nature différente mais étroitement liés : graphes médians, algèbres médians, complexes cubiques médians, espaces métriques et réseaux médians. Dans cette section, nous définissons ce qu'est la fermeture médiane et le complexe médian d'un ensemble de terminaux. Nous utiliserons ces ensembles pour caractériser l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .

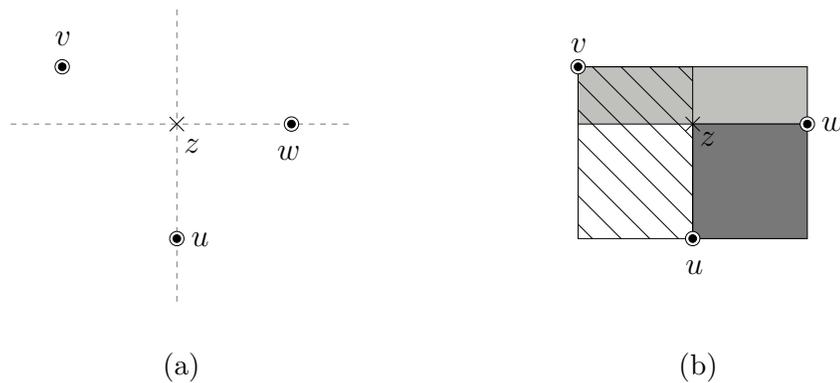


FIG. 2.12 – Point médian

Le point *médian* de trois points $u, v, w \in \mathbb{R}^m$, est le point $z \in \mathbb{R}^m$ tel que z^i est la valeur médiane de u^i, v^i et w^i pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ (Fig. 2.12.(a)). Nous noterons $m(u, v, w)$ le point médian du triplet $\{u, v, w\}$. Le point $m(u, v, w)$ a la particularité d'être le seul point appartenant aux intervalles $I_{d_1}(u, v)$, $I_{d_1}(u, w)$ et $I_{d_1}(v, w)$ (Fig. 2.12.(b)). Il est donc le seul point qui réalise les égalités triangulaires entre u et v , u et w , et v et w .

Un ensemble de points $S \subset \mathbb{R}^m$ est *médian* si et seulement si $m(u, v, w) \in S$ pour tout triplet $(u, v, w) \in S$. Remarquons, qu'un ensemble de terminaux $T \subset \mathbb{R}^m$ n'est pas forcément médian. Par contre, il est possible de construire le plus petit ensemble médian contenant les terminaux de T . Cet ensemble, appelé *fermeture médiane* de l'ensemble T et noté $\text{med}(T)$, est défini récursivement comme suit :

$$\text{med}(T) = \begin{cases} T & \text{si } m(u, v, w) \in T \text{ pour tout } u, v, w \in T, \\ \text{med}(T \cup \{m(u, v, w) : u, v, w \in T\}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après cette définition, pour construire cette fermeture, il suffit d'ajouter à T les points médians de tous les triplets de T , et de réitérer l'opération sur l'ensemble ainsi obtenu tant que la

cardinalité de celui-ci augmente. Le nombre d'itérations à effectuer pour obtenir $\text{med}(T)$ dépend de la dimension de l'ensemble T et il a été borné dans [71]. Dans nos démonstrations, nous utiliserons la caractérisation suivante qui a été montrée dans [39, 69] pour des espaces médians généraux. Nous donnons ici une formulation spécifique à l'espace normé (\mathbb{R}^m, d_1) .

Lemme 2.2.13 (Séparation) [39, 69] *Pour tout ensemble de terminaux $T \subset \mathbb{R}^m$, un point p appartient à $\text{med}(T)$ si et seulement si pour toute paire de demi-espaces axe-parallèles $\{D_1, D_2\}$ tel que $p \in (D_1 \cap D_2)$, nous avons $T \cap (D_1 \cap D_2) \neq \emptyset$.*

En d'autres termes, $p \in \text{med}(T)$ si et seulement si il n'existe pas de quart d'espace Q délimité par deux hyperplans axe-parallèles tel que $p \in Q$ et $Q \cap T = \emptyset$. Dans nos preuves, nous dirons que p n'appartient pas à $\text{med}(T)$ si et seulement si il existe deux hyperplans axe-parallèles permettant de séparer (isoler) p de tous les terminaux.

A partir de la fermeture médiane, un ensemble géométrique continu peut être défini. Cet ensemble, appelé *réalisation géométrique* de $\text{med}(T)$ et noté $\mathcal{M}(T)$, est un complexe cubique conforme de la grille $G(T)$. En dimension 3, une cellule Π de la grille rectilinéaire appartient à $\mathcal{M}(T)$ si et seulement si l'une des trois conditions suivantes est vérifiée :

- (i) Tous les sommets de Π appartiennent à $\text{med}(T)$.
- (ii) Seulement deux sommets de Π , diagonalement opposés, appartiennent à $\text{med}(T)$.
- (iii) Seulement quatre sommets de Π , extrémités d'arêtes opposées, appartiennent à $\text{med}(T)$.

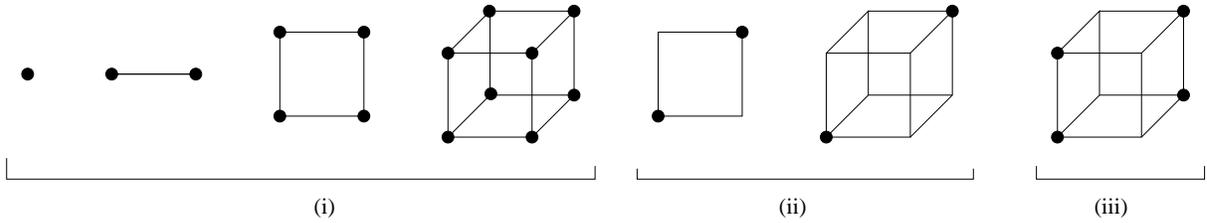


FIG. 2.13 – Construction de la réalisation géométrique $\mathcal{M}(T)$

De la même manière, l'ensemble $\mathcal{M}(T)$ est défini pour des ensembles de terminaux $T \subset \mathbb{R}^2$ en utilisant seulement les conditions (i) et (ii). Sur la Figure 2.13, les configurations pour lesquelles une cellule de dimension zéro, un, deux ou trois appartient à $\mathcal{M}(T)$ sont représentées.

Nous allons maintenant montrer que les ensembles $\text{med}(T)$ et $\mathcal{M}(T)$ sont inclus dans l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ pour tout $T \subset \mathbb{R}^3$. Par la suite, nous utiliserons ces propriétés pour établir l'égalité entre $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ et $\mathcal{M}(T)$ en dimensions 2 et 3. Avant cela, nous établissons les deux lemmes intermédiaires suivants.

Lemme 2.2.14 *Soit $T \subset \mathbb{R}^3$ et Π une cellule de dimension 3 de la grille $G(T)$. Alors, nous avons les deux équivalences suivantes :*

- (i) *deux sommets a et b diagonalement opposés de la cellule Π sont les seuls sommets de Π appartenant à $\text{med}(T)$ si et seulement si les orthants portés par a et b sont les seuls orthants de Π contenant des terminaux ;*
- (ii) *deux paires $\{a, b\}$ et $\{a', b'\}$ de sommets diagonalement opposés de la cellule Π sont les seuls sommets de Π appartenant à $\text{med}(T)$ si et seulement si les orthants portés par a, b, a', b' sont les seuls orthants de Π contenant des terminaux.*

Preuve. Voici la preuve de chacune des équivalences :

(i) Montrons que si a et b sont les seuls sommets médians de Π , alors $T \subset \text{Ort}(\Pi, a) \cup \text{Ort}(\Pi, b)$, $\text{Ort}(\Pi, a) \cap T \neq \emptyset$ et $\text{Ort}(\Pi, b) \cap T \neq \emptyset$. Pour cela, supposons par contradiction qu'un terminal t n'appartient pas aux orthants $\text{Ort}(\Pi, a)$ et $\text{Ort}(\Pi, b)$. Comme Π est une cellule de $G(T)$, il existe un sommet c de Π tel que $t \in \text{Ort}(\Pi, c)$ (Fig. 2.14.(a)). Etant donné que c est la porte de a et b dans $\text{Ort}(\Pi, c)$ et que $c \in I_{d_1}(a, b)$, nous déduisons que $c \in I_{d_1}(a, b) \cap I_{d_1}(a, t) \cap I_{d_1}(b, t)$. Par conséquent, $c = m(a, b, t)$ et donc $c \in \text{med}(T)$. Cela contredit l'hypothèse que a et b sont les seuls sommets de Π appartenant à $\text{med}(T)$. Les orthants portés par des sommets différents de a et b sont donc vides. Quant aux orthants $\text{Ort}(\Pi, a)$ et $\text{Ort}(\Pi, b)$, d'après la définition de la grille, ils contiennent nécessairement des terminaux de T .

Pour obtenir l'implication inverse, montrons dans un premier temps que a et b sont des points médians. Comme ces deux sommets ont des positions symétriques, il suffit de montrer que a est un point médian. Etant donné que a est un sommet de la grille et que seuls les orthants portés par a et b contiennent des terminaux, nous déduisons qu'il existe trois terminaux t_u, t_v, t_w appartenant à $\text{Ort}(\Pi, a)$ tel que $t_u^1 = a^1, t_v^2 = a^2$ et $t_w^3 = a^3$, et un terminal t' appartenant à $\text{Ort}(\Pi, b)$. D'après le lemme de séparation, nous déduisons que a est un point médian car nous pouvons remarquer qu'il n'est pas possible de l'isoler de T par une paire d'hyperplans à cause des terminaux t_u, t_v, t_w et t' . Les sommets a et b sont donc des points médians. En utilisant une nouvelle fois le lemme de séparation, nous déduisons que a et b sont les seuls sommets de Π appartenant à $\text{med}(T)$, car les autres sommets peuvent être séparés de T par deux hyperplans axe-parallèles. Par exemple, les sommets d et e représentés sur la Figure. 2.14.(a), peuvent être séparés de T par l'hyperplan axe-parallèle passant par a, e et d , et l'hyperplan axe-parallèle passant par b, d et e .

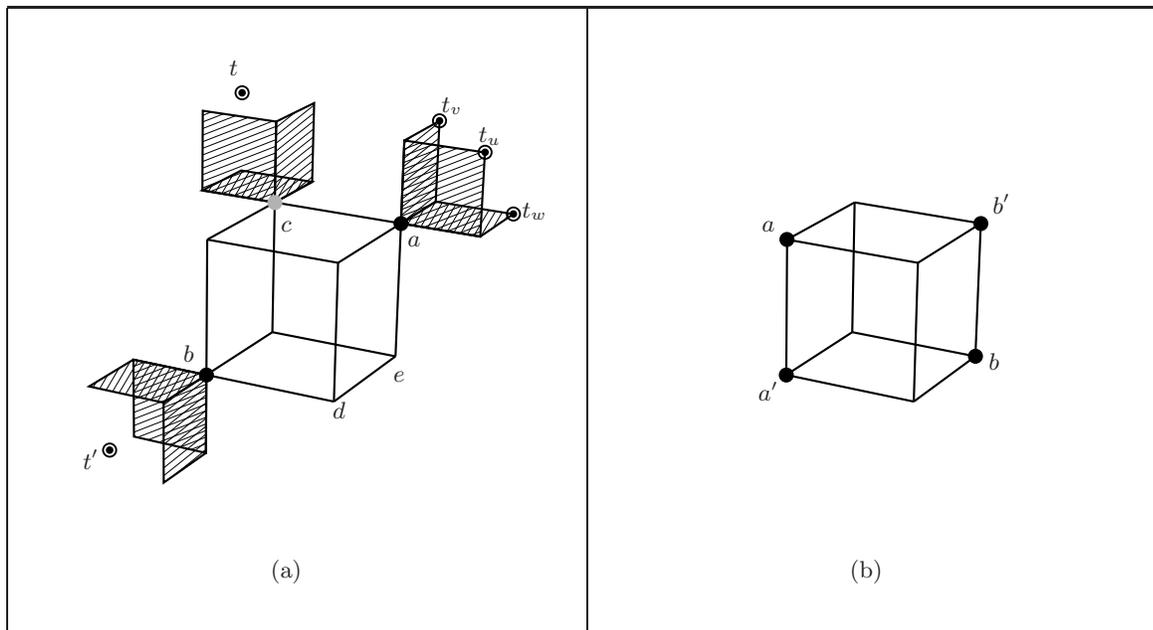


FIG. 2.14 – Illustration du Lemme 2.2.14

(ii) Si a, b, a' et b' sont les seuls sommets médians de Π (Fig. 2.14.(b)), alors $T \subset \text{Ort}(\Pi, a) \cup$

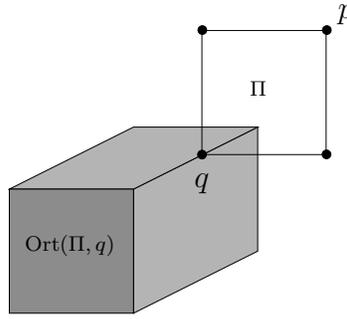


FIG. 2.15 – Illustration du Lemme 2.2.16

$\text{Ort}(\Pi, b) \cup \text{Ort}(\Pi, a') \cup \text{Ort}(\Pi, b')$ car, si ce n'est pas le cas, nous déduisons comme précédemment qu'il existerait un autre sommet c de Π appartenant à $\text{med}(T)$. Pour montrer que chacun de ces orthants contient au moins un terminal, supposons par contradiction et sans perte de généralité que $\text{Ort}(\Pi, a) \cap T = \emptyset$. D'après le lemme de séparation, nous déduisons que $a \notin \text{med}(T)$ car il est possible de l'isoler de T en utilisant, par exemple, l'hyperplan axe-parallèle passant par a et b' , et l'un des hyperplans axe-parallèles passant par a et a' . Pour montrer l'implication inverse, nous utilisons également le lemme de séparation. D'après ce lemme, nous concluons, comme nous l'avons fait dans la preuve de l'équivalence (i), que a, b, a' et b' sont des sommets médians et que les autres sommets de Π ne le sont pas.

□

De la même manière, ce résultat peut être prouvé pour des terminaux de \mathbb{R}^2 :

Lemme 2.2.15 Soit $T \subset \mathbb{R}^2$ et Π une cellule de dimension 2 de la grille $G(T)$. Alors, deux sommets a et b diagonalement opposés de la cellule Π sont les seuls sommets de Π appartenant à $\text{med}(T)$ si et seulement si les orthants portés par a et b sont les seuls orthants de Π contenant des terminaux.

Lemme 2.2.16 Pour tout ensemble $T \subset \mathbb{R}^3$, nous avons $\text{med}(T) \subseteq \mathcal{P}_{d_1}(T)$.

Preuve. Montrons qu'un point $q \in \text{med}(T)$ ne peut pas être dominé. Supposons par contradiction que q est dominé par un point p . Comme q est un point médian, la définition de $\text{med}(T)$ implique que q est un sommet de la grille $G(T)$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que la grille $G(T)$ engendrée par T est unitaire. D'après le lemme de la domination discrète dans \mathbb{R}^2 et dans \mathbb{R}^3 , nous pouvons supposer que $\Delta(p, q) = 2$. Soit Π le parallélépipède axe-parallèle (de dimension 2) de diagonale $[p, q]$ (Fig. 2.15). Comme p domine q , nous déduisons que $\text{Ort}(\Pi, q) \cap T = \emptyset$, car les points appartenant à cet orthant sont plus proches de q que de p . D'après le lemme de séparation, nous déduisons que q n'appartient pas à $\text{med}(T)$, car les deux hyperplans axe-parallèles qui définissent $\text{Ort}(\Pi, q)$ isolent le point q de l'ensemble T , en contradiction avec l'hypothèse $q \in \text{med}(T)$.

□

Proposition 2.2.3 Pour tout ensemble $T \subset \mathbb{R}^3$, nous avons $\mathcal{M}(T) \subseteq \mathcal{P}_{d_1}(T)$.

Preuve. Il suffit de montrer que toute cellule Π de la grille rectilinéaire appartenant à $\mathcal{M}(T)$, appartient également à $\mathcal{P}_{d_1}(T)$. D'après la définition de $\mathcal{M}(T)$, trois cas sont à considérer :

1. Tous les sommets de Π appartiennent à $\text{med}(T)$. D'après le Lemme 2.2.16, tous les sommets de Π appartiennent également à $\mathcal{P}_{d_1}(T)$. L'ensemble $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ étant un complexe cubique conforme, nous déduisons que $\Pi \subseteq \mathcal{P}_{d_1}(T)$.
2. Seuls deux sommets de Π , diagonalement opposés, appartiennent à $\text{med}(T)$. Notons a et b ces deux sommets. D'après le Lemme 2.2.14 si Π est de dimension 2, ou le Lemme 2.2.15 si Π est de dimension 3, nous déduisons que $T \subset \text{Ort}(\Pi, a) \cup \text{Ort}(\Pi, b)$ et que chacun de ces deux orthants contient au moins un terminal. A présent, considérons un terminal arbitraire t' appartenant à l'un des deux orthants et un terminal t'' appartenant à l'orthant opposé. Comme les points a et b ainsi que Π appartiennent à $I_{d_1}(t', t'')$, nous déduisons que $\Pi \subseteq \cup_1^n I_{d_1}(t', t_i)$. Par conséquent, $\Pi \subseteq \Upsilon_{d_1}(T)$ puisque t' est un terminal arbitraire. D'après la Proposition 2.1.1, nous déduisons que $\Pi \subseteq \mathcal{P}_{d_1}(T)$ car $\Upsilon_{d_1}(T) \subseteq \mathcal{P}_{d_1}(T)$.
3. Seuls deux paires $\{a, b\}$ et $\{a', b'\}$ de sommets diagonalement opposés de Π appartiennent à $\text{med}(T)$. D'après les lemmes 2.2.14, nous déduisons que $T \subset \text{Ort}(\Pi, a) \cup \text{Ort}(\Pi, b) \cup \text{Ort}(\Pi, a') \cup \text{Ort}(\Pi, b')$ et que chacun de ces quatre orthants contient au moins un terminal. A présent, considérons un terminal arbitraire t' appartenant à l'un des quatre orthants et un terminal t'' appartenant à l'orthant opposé (celui-ci existe nécessairement d'après la position des sommets a, b, a' et b'). Comme dans le cas 2, nous déduisons que $\Pi \subseteq I_{d_1}(t', t'') \subseteq \cup_1^n I_{d_1}(t', t_i)$ et donc que $\Pi \subseteq \mathcal{P}_{d_1}(T)$ car $\Upsilon_{d_1}(T) \subseteq \mathcal{P}_{d_1}(T)$.

□

2.2.6 Une “enveloppe” pour l’enveloppe de Pareto

Comme le montre le contre-exemple 2.1.1, l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ et l'ensemble $\Upsilon_{d_1}(T)$ coïncident uniquement dans le plan. Pour cette raison, nous avons introduit un nouvel ensemble afin de caractériser $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ dans \mathbb{R}^3 . Cet ensemble, noté $\mathcal{I}(T)$, est défini à partir des trois enveloppes de Pareto de dimension 2 des terminaux de $T^{\{1,2\}}$, $T^{\{1,3\}}$ et $T^{\{2,3\}}$. Dans cette section, nous donnons une définition générale de $\mathcal{I}(T)$ dans \mathbb{R}^m et montrons qu'il englobe toujours l'enveloppe de Pareto. Par la suite, nous montrerons que ces deux ensembles coïncident en dimension 3.

Afin de définir $\mathcal{I}(T)$, pour tout $T \subset \mathbb{R}^m$ et pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, nous notons $T^{\overline{\{i\}}}$ la projection orthogonale des terminaux T sur l'hyperplan $H^{\overline{\{i\}}}$, et $\mathcal{P}_{d_1}(T^{\overline{\{i\}}})$ l'enveloppe de Pareto de cette projection. Nous notons également, $\mathcal{I}^i(T)$ le polyèdre non-borné obtenu en effectuant le produit cartésien de $\mathcal{P}_{d_1}(T^{\overline{\{i\}}})$ par la droite D^i normale à l'hyperplan $H^{\overline{\{i\}}}$. L'ensemble $\mathcal{I}(T)$ est obtenu en réalisant l'intersection de ces différents polyèdres :

$$\mathcal{I}(T) = \cap_{i=1}^m \mathcal{I}^i(T) = \cap_{i=1}^m (\mathcal{P}_{d_1}(T^{\overline{\{i\}}}) \times H^{\{i\}}).$$

La Figure 2.16 représente l'ensemble $\mathcal{I}(T)$ pour six terminaux de \mathbb{R}^3 , et les trois polyèdres $\mathcal{I}^1(T)$, $\mathcal{I}^2(T)$ et $\mathcal{I}^3(T)$ dont il est l'intersection. Les enveloppes de Pareto de dimension 2 à partir desquelles sont définis ces trois polyèdres sont également représentées. Nous allons à présent établir l'inclusion de $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ dans $\mathcal{I}(T)$.

Proposition 2.2.4 *Pour tout ensemble $T \subset \mathbb{R}^m$, nous avons $\mathcal{P}_{d_1}(T) \subseteq \mathcal{I}(T)$.*

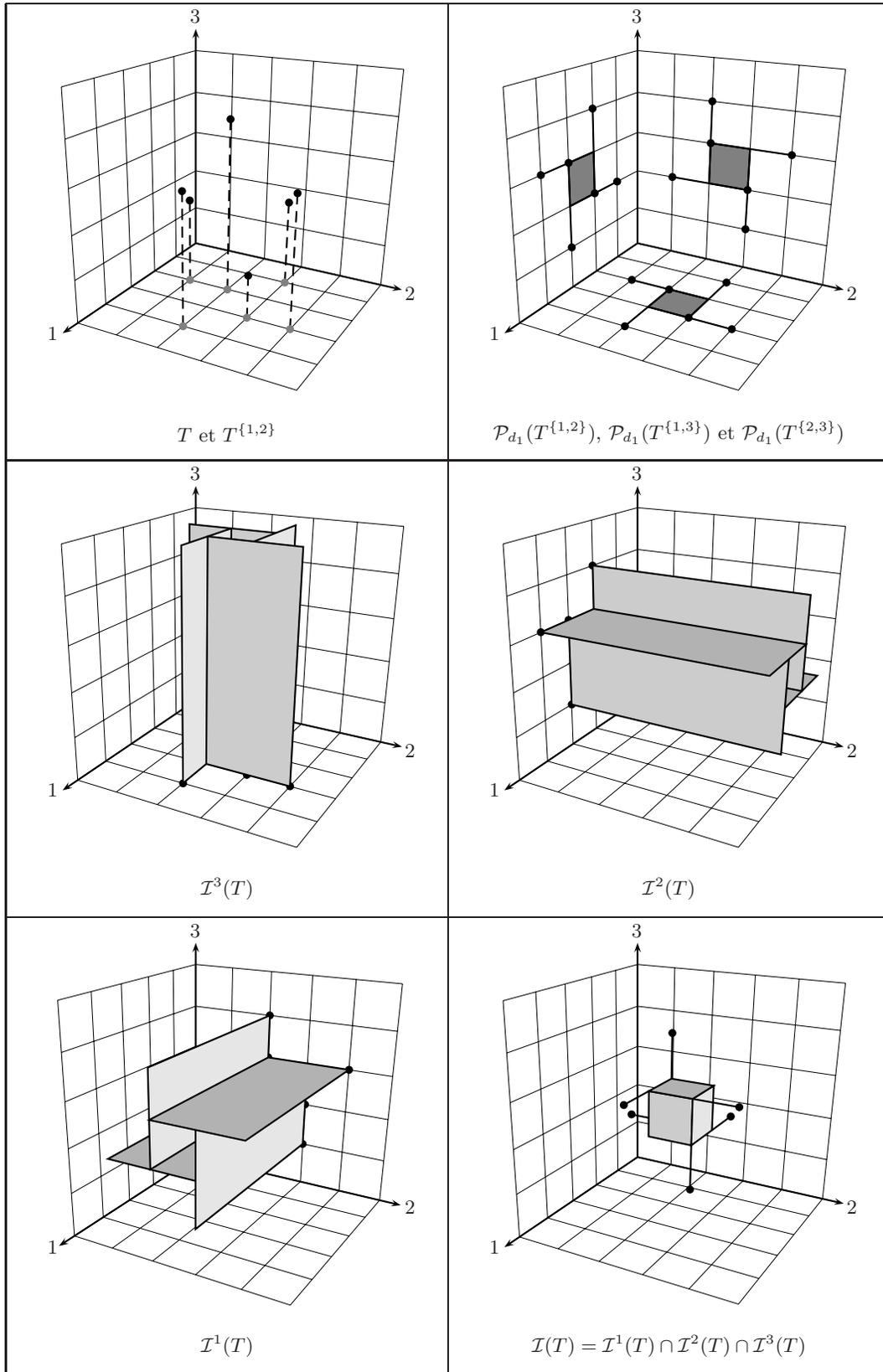


FIG. 2.16 – L'ensemble $\mathcal{I}(T)$ dans \mathbb{R}^3

Preuve. Il suffit de montrer, pour tout $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ et tout $q \in \mathbb{R}^m$, que si $q^I \notin \mathcal{P}_{d_1}(T^I)$ alors $q \notin \mathcal{P}_{d_1}(T)$. D'après la Remarque 2.2.2, il existe un point $r \in \Pi(T^I)$ tel que $r \succ_{T^I} q^I$. Comme $r^{\bar{I}} = 0$, le point p tel que $p^I = r$ et tel que $p^{\bar{I}} = q^{\bar{I}}$ existe. Nous allons montrer que $p \succ_T q$. Etant donné que $p^{\bar{I}} = q^{\bar{I}}$, nous avons $d_1^{\bar{I}}(p, t) = d_1^{\bar{I}}(q, t)$ pour tout $t \in T$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} d_1(p, t) - d_1(q, t) &= d_1^I(p, t) + d_1^{\bar{I}}(p, t) - d_1^I(q, t) - d_1^{\bar{I}}(q, t) \\ &= d_1^I(p, t) - d_1^I(q, t) \\ &= d_1(p^I, t^I) - d_1(q^I, t^I) \\ &= d_1(r, t^I) - d_1(q^I, t^I). \end{aligned}$$

Pour tout $t \in T$ nous avons donc $d_1(p, t) \leq d_1(q, t)$ si $d_1(r, t^I) \leq d_1(q^I, t^I)$, et $d_1(p, t) < d_1(q, t)$ si $d_1(r, t^I) < d_1(q^I, t^I)$. Par conséquent, comme $r \succ_{T^I} q^I$, nous concluons que $p \succ_T q$. \square

Proposition 2.2.5 (Complexe cubique conforme $\mathcal{I}(T)$) *Pour tout $T \subset \mathbb{R}^m$, l'ensemble $\mathcal{I}(T)$ est un complexe cubique conforme de la grille $G(T)$.*

Preuve. D'après le Lemme 2.2.8, il suffit de montrer, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, que $\mathcal{I}^i(T)$ est un complexe cubique conforme. D'après la Proposition 2.2.1, nous savons que $\mathcal{P}_{d_1}(T^{\overline{\{i\}}})$ est un complexe cubique conforme. Par conséquent, comme $\mathcal{I}^i(T)$ est le produit cartésien de $\mathcal{P}_{d_1}(T^{\overline{\{i\}}})$ par la droite D^i , il est facile de déduire que $\mathcal{I}^i(T)$ est également un complexe cubique conforme. \square

2.2.7 Caractérisations

Nous énonçons à présent le théorème principal concernant la caractérisation de l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ d'ensemble de terminaux de \mathbb{R}^2 et de \mathbb{R}^3 . Dans les deux chapitres qui suivent, nous utiliserons ces caractérisations pour construire l'enveloppe de Pareto dans ces deux dimensions.

Théorème 2.2.1 *Pour tout ensemble $T \subset \mathbb{R}^2$, nous avons $\mathcal{P}_{d_1}(T) = \mathcal{M}(T) = \Upsilon_{d_1}(T)$. Pour tout ensemble $T \subset \mathbb{R}^3$, nous avons $\mathcal{P}_{d_1}(T) = \mathcal{M}(T) = \mathcal{I}(T)$.*

Afin d'obtenir ces différentes égalités, nous allons d'abord établir celles vérifiées dans le plan, puis les utiliser pour établir celles vérifiées en dimension 3. Pour montrer que $\mathcal{P}_{d_1}(T) = \mathcal{M}(T)$ pour tout ensemble de \mathbb{R}^2 , nous allons utiliser le Théorème 2.1.1 de Chalmet *et al.* [18] dans \mathbb{R}^2 , *i.e.*, $\mathcal{P}_{d_1}(T) = \Upsilon_{d_1}(T)$. Pour cette raison, nous commençons par redémontrer ce théorème à l'aide d'une preuve plus simple qui utilise les différentes propriétés et outils que nous avons introduit jusqu'à maintenant.

Proposition 2.2.6 [18] *Pour tout ensemble $T \subset \mathbb{R}^2$, nous avons $\mathcal{P}_{d_1}(T) = \Upsilon_{d_1}(T)$.*

Preuve. Tout au long de cette preuve, nous nous référons à la Figure 2.17. D'après la Proposition 2.1.1, $\Upsilon_{d_1}(T) \subseteq \mathcal{P}_{d_1}(T)$. Il reste donc à montrer que si $q \notin \Upsilon_{d_1}(T)$, alors $q \notin \mathcal{P}_{d_1}(T)$. Comme $\Upsilon_{d_1}(T)$ et $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ sont des complexes cubiques conformes de la grille $G(T)$, d'après le Lemme 2.2.9, nous pouvons supposer que q est un sommet de celle-ci. Nous pouvons également

supposer, sans perte de généralité, que la grille est unitaire. Par définition, le sommet q est nécessairement aligné horizontalement avec un terminal que nous notons t_h , et aligné verticalement avec un terminal que nous notons t_v . Remarquons que le point q n'est pas confondu avec l'un de ces terminaux car il n'appartient pas à $\Upsilon_{d_1}(T)$. Nous pouvons donc supposer, sans perte de généralité, que t_h et t_v sont respectivement à droite et en haut de q . Soit Π la cellule de la grille

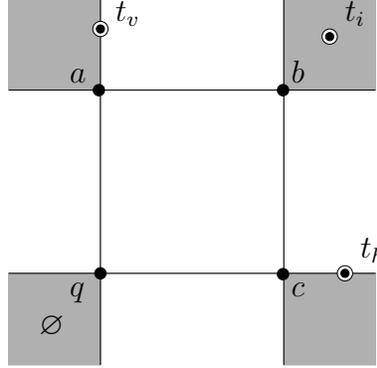


FIG. 2.17 – Illustration de la Proposition 2.2.6

de sommets a , b , c et q tel que $a \in [q, t_v]$ et $c \in [q, t_h]$. Comme $q \notin \Upsilon_{d_1}(T)$, il existe un terminal t_i tel que $q \notin \cup_{j=1}^n I_{d_1}(t_i, t_j)$. Nous déduisons que $t_i \in \text{Ort}(\Pi, b)$, car si t_i appartient à l'un des trois autres orthants, nous remarquons qu'il existe toujours un terminal $t_{i'}$ tel que $q \in I_{d_1}(t_i, t_{i'})$. En effet,

- si $t_i \in \text{Ort}(\Pi, a)$ alors $q \in I_{d_1}(t_i, t_h)$;
- si $t_i \in \text{Ort}(\Pi, c)$ alors $q \in I_{d_1}(t_i, t_v)$;
- si $t_i \in \text{Ort}(\Pi, q)$ alors $q \in I_{d_1}(t_i, t_v)$.

Nous déduisons également qu'il n'existe pas de terminal $t \in \text{Ort}(\Pi, q)$ car, si c'était le cas, q appartiendrait à $I_{d_1}(t_i, t)$. Etant donné que $d_1(b, t) = d_1(q, t)$ pour tout terminal t appartenant à $\text{Ort}(\Pi, a) \cup \text{Ort}(\Pi, c)$, et que $d_1(b, t') < d_1(q, t')$ pour tout terminal t' appartenant à $\text{Ort}(\Pi, b)$, nous concluons que $b \succ q$. \square

Proposition 2.2.7 *Pour tout ensemble $T \subset \mathbb{R}^2$, nous avons $\mathcal{P}_{d_1}(T) = \mathcal{M}(T)$.*

Preuve. Tout au long de cette preuve, nous nous référons à la Figure 2.18. D'après les propositions 2.2.6 et 2.2.3, $\mathcal{M}(T) \subseteq \mathcal{P}_{d_1}(T) = \Upsilon_{d_1}(T)$. Il suffit donc de montrer que si $q \in \Upsilon_{d_1}(T)$ alors $q \in \mathcal{M}(T)$. Comme $\Upsilon_{d_1}(T)$ et $\mathcal{M}(T)$ sont des complexes cubiques conformes de la grille $G(T)$, d'après le Lemme 2.2.9, nous pouvons supposer que q est un sommet de celle-ci. Par définition, le sommet q est nécessairement aligné horizontalement avec un terminal que nous notons t_h , et aligné verticalement avec un terminal que nous notons t_v . Si le point q coïncide avec l'un de ces terminaux, nous concluons que q appartient à $\mathcal{M}(T)$ car c'est le cas pour tous les terminaux. Dans le cas contraire, nous pouvons supposer sans perte de généralité que t_h et t_v sont respectivement à droite et en haut de q . Soit Π la cellule de sommets a , b , c et q tel que $a \in [q, t_v]$ et $c \in [q, t_h]$. Si $\text{Ort}(\Pi, q)$ contient un terminal $t \in T$, nous concluons que $q \in \mathcal{M}(T)$ car $q = m(t_h, t_v, t)$. Nous pouvons donc supposer que $\text{Ort}(\Pi, q) \cap T = \emptyset$. Si un terminal t appartient à $\text{Ort}(\Pi, b)$, nous déduisons que $q \notin \cup_{j=1}^n I_{d_1}(t, t_j)$ car $\text{Ort}(\Pi, q)$ est vide. Cela contredit le fait que $q \in \Upsilon_{d_1}(T)$. Il reste donc à traiter le cas où seuls les orthants $\text{Ort}(\Pi, a)$ et $\text{Ort}(\Pi, c)$

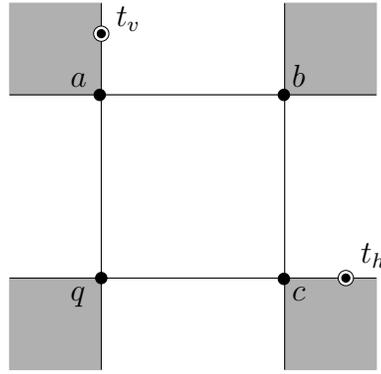


FIG. 2.18 – Illustration de la Proposition 2.2.7

contiennent des terminaux. D'après le Lemme 2.2.15, nous déduisons que a et b sont les seuls sommets de Π , diagonalement opposés, appartenant à $\text{med}(T)$. Par conséquent, $q \in \mathcal{M}(T)$ car $\Pi \subseteq \mathcal{M}(T)$ d'après la définition de $\mathcal{M}(T)$. \square

La partie du théorème concernant les ensembles de \mathbb{R}^2 est donc établie car $\mathcal{P}_{d_1}(T) = \Upsilon_{d_p}(T)$ d'après la Proposition 2.2.6 et $\mathcal{P}_{d_1}(T) = \mathcal{M}(T)$ d'après la Proposition 2.2.7.

Maintenant, soit $T \subset \mathbb{R}^3$. Nous savons que $\mathcal{M}(T) \subseteq \mathcal{P}_{d_1}(T)$ d'après la Proposition 2.2.3 et que $\mathcal{P}_{d_1}(T) \subseteq \mathcal{I}(T)$ d'après la Proposition 2.2.4. Pour montrer que ces trois ensembles coïncident, nous allons montrer que $\mathcal{P}_{d_1}(T) = \mathcal{I}(T)$, puis utiliser cette égalité pour montrer que $\mathcal{I}(T) \subseteq \mathcal{M}(T)$. Pour cela, nous notons $I_1 = \{2, 3\}$, $I_2 = \{1, 3\}$ et $I_3 = \{1, 2\}$.

Proposition 2.2.8 *Pour tout ensemble $T \subset \mathbb{R}^3$, nous avons $\mathcal{P}_{d_1}(T) = \mathcal{I}(T)$.*

Preuve. D'après la Proposition 2.2.4, nous savons que $\mathcal{P}_{d_1}(T) \subseteq \mathcal{I}(T)$. Il suffit donc de montrer que si $q \notin \mathcal{P}_{d_1}(T)$, alors $q \notin \mathcal{I}(T)$. Comme $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ et $\mathcal{I}(T)$ sont des complexes cubiques conformes de la grille $G(T)$, d'après le Lemme 2.2.9, nous pouvons supposer sans perte de généralité que q est un sommet de celle-ci. Nous pouvons également supposer que la grille est unitaire. D'après le lemme de la domination discrète dans \mathbb{R}^3 , nous savons que q est dominé par un point p tel que $\Delta(p, q) = 2$. Il existe donc un ensemble d'indices I appartenant à $\{I_1, I_2, I_3\}$ tel que $p^I = q^I$. Pour cette raison, pour tout $t \in T$, nous avons $d_1^{\bar{I}}(p, t) = d_1^{\bar{I}}(q, t)$. De plus, l'égalité suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} d_1(p, t) - d_1(q, t) &= d_1^I(p, t) + d_1^{\bar{I}}(p, t) - d_1^I(q, t) - d_1^{\bar{I}}(q, t) \\ &= d_1^I(p, t) - d_1^I(q, t) \\ &= d_1(p^I, t^I) - d_1(q^I, t^I). \end{aligned}$$

Comme $p \succ q$, nous déduisons que $p^I \succ_{T^I} q^I$ et donc que $q^I \notin \mathcal{P}_{d_1}(T^I)$. D'après la définition de $\mathcal{I}(T)$, nous concluons que $q \notin \mathcal{I}(T)$. \square

Lemme 2.2.17 *Pour tout point $p \in \mathbb{R}^3$, si $p^{I_1} \in \text{med}(T^{I_1})$, $p^{I_2} \in \text{med}(T^{I_2})$ et $p^{I_3} \in \text{med}(T^{I_3})$, alors $p \in \text{med}(T)$.*

Preuve. Comme p^{I_1} appartient à $\text{med}(T^{I_1})$, nous déduisons qu'il existe un point u appartenant à $\text{med}(T)$ tel que $u^2 = p^2$ et $u^3 = p^3$. De même, comme $p^{I_2} \in \text{med}(T^{I_2})$ et $p^{I_3} \in \text{med}(T^{I_3})$, il

existe deux points v et w appartenant à $\text{med}(T)$ tel que $v^1 = p^1$, $v^3 = p^3$, $w^1 = p^1$ et $w^2 = p^2$. Nous concluons que p appartient à $\text{med}(T)$ car $p = m(u, v, w)$. \square

Proposition 2.2.9 *Pour tout ensemble $T \subset \mathbb{R}^3$, nous avons $\mathcal{I}(T) \subseteq \mathcal{M}(T)$.*

Preuve. Comme $\mathcal{I}(T)$ et $\mathcal{M}(T)$ sont des complexes cubiques conformes, d'après le Lemme 2.2.9, il suffit de montrer que si un sommet q de la grille $G(T)$ appartient $\mathcal{I}(T)$, alors q appartient également à $\mathcal{M}(T)$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que la grille $G(T)$ est unitaire. Par hypothèse, d'après la Proposition 2.2.8, remarquons que le sommet q n'est pas dominé car il appartient à $\mathcal{I}(T)$. D'après le Lemme 2.2.17, si $q^{I_1} \in \text{med}(T^{I_1})$, $q^{I_2} \in \text{med}(T^{I_2})$ et $q^{I_3} \in \text{med}(T^{I_3})$, nous concluons que $q \in \text{med}(T)$, et donc que $q \in \mathcal{M}(T)$ car $\text{med}(T) \subseteq \mathcal{M}(T)$. Il nous reste donc à nous intéresser au cas où il existe un ensemble $I \in \{I_1, I_2, I_3\}$ tel que $q^I \notin \text{med}(T^I)$. Sans perte de généralité, supposons que $I := I_3$. Etant donné que $q \in \mathcal{I}(T)$, nous savons que $q^{I_3} \in \mathcal{P}_{d_1}(T^{I_3})$. D'après la Proposition 2.2.7, nous déduisons que $q \in \mathcal{M}(T^{I_3})$ car $\mathcal{P}_{d_1}(T^{I_3}) = \mathcal{M}(T^{I_3})$. D'après la définition de $\mathcal{M}(T^{I_3})$, remarquons que q^{I_3} appartient à une cellule Π' de $G(T^{I_3})$ dont soit tous les sommets appartiennent à $\text{med}(T^{I_3})$, soit seulement deux sommets diagonalement opposés appartiennent à $\text{med}(T^{I_3})$. Comme q^{I_3} est un sommet de $G(T^{I_3})$ et que $q^{I_3} \notin \text{med}(T^{I_3})$, nous déduisons que Π' est une cellule de dimension 2 dont seulement deux sommets diagonalement opposés appartiennent à $\text{med}(T^{I_3})$. Notons s_1 et s_2 ces deux sommets, et s_3 et s_4 les deux autres sommets de Π' qui n'appartiennent pas à $\text{med}(T^{I_3})$ (Fig. 2.19.(a)). Soit Π la cellule de dimension 3 de $G(T)$ tel que q est un sommet de Π et tel que $\Pi^{I_3} = \Pi'$ (la cellule Π existe car T est un ensemble de \mathbb{R}^3). Notons a, b, c, d, e, f et g les sept autres sommets de la cellule Π (Fig. 2.19.(a)). D'après le Lemme 2.2.15, nous déduisons que $T^{I_3} \subset \text{Ort}(\Pi', s_1) \cup \text{Ort}(\Pi', s_2)$, car s_3 et s_4 ne sont pas des points médians de T^{I_3} . Par conséquent, comme l'ensemble T^{I_3} est la projection de T sur le plan H^{I_3} , nous déduisons que $T \subset \text{Ort}(\Pi, a) \cup \text{Ort}(\Pi, b) \cup \text{Ort}(\Pi, c) \cup \text{Ort}(\Pi, d)$ et que les quatre autres orthants sont vides. D'après le lemme de séparation, remarquons que les sommets e, f, g et q n'appartiennent pas à $\text{med}(T)$, car il est possible d'isoler de T chacun de ces sommets. D'après la définition de la grille, nous savons que l'hyperplan axe-parallèle passant par a et c contient un terminal que nous notons t_a . Nous pouvons supposer, sans perdre de généralité, que t_a appartient à $\text{Ort}(\Pi, a)$. A présent, nous allons faire une analyse de cas sur la présence ou l'absence de terminaux dans les orthants portés par b, c et d tout en sachant que $\text{Ort}(\Pi, a)$ n'est pas vide (notons, d'après la définition de la grille, qu'au moins deux orthants doivent être non vides).

1. Les quatre orthants portés par a, b, c et d contiennent des terminaux. Nous déduisons, d'après le Lemme 2.2.14, que a, b, c et d sont les seuls sommets de Π appartenant à $\text{med}(T)$, et donc que $q \in \mathcal{M}(T)$ car $\Pi \subseteq \mathcal{M}(T)$ d'après la définition du complexe cubique $\mathcal{M}(T)$.
2. Seuls deux orthants contiennent des terminaux. Comme $t \in \text{Ort}(\Pi, a)$, d'après la définition de la grille, nous déduisons que $\text{Ort}(\Pi, d)$ est le deuxième orthant contenant des terminaux. Comme ces deux orthants sont diagonalement opposés, d'après le Lemme 2.2.14, nous déduisons que a et d sont les seuls sommets de Π appartenant à $\text{med}(T)$, et donc que $q \in \mathcal{M}(T)$ car $\Pi \subseteq \mathcal{M}(T)$.
3. Seuls trois orthants contiennent des terminaux. Les trois sous-cas suivants doivent être considérés :
 - (a) Seuls les orthants portés par a, b et c contiennent des terminaux. Nous déduisons que a domine q car les terminaux appartenant à $\text{Ort}(\Pi, b)$ et $\text{Ort}(\Pi, c)$ sont équidistants de a et q , et que les terminaux appartenant à $\text{Ort}(\Pi, a)$ sont plus proches de a que de q . Cela contredit l'hypothèse que q n'est pas dominé.

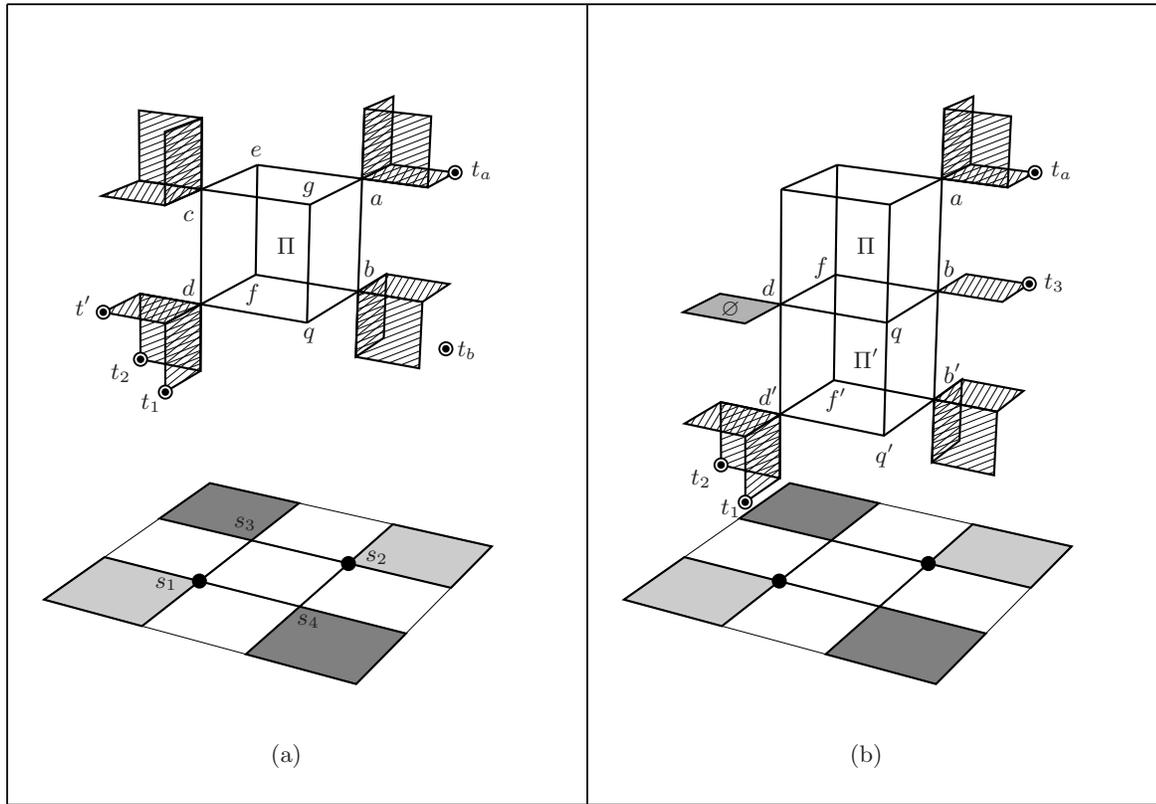
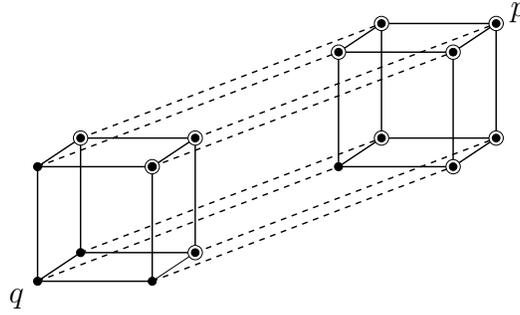


FIG. 2.19 – Illustration de la Proposition 2.2.9

- (b) Seuls les orthants portés par a , c et d contiennent des terminaux. En utilisant le même raisonnement que dans le sous-cas (a), nous déduisons une contradiction car le point c domine q .
- (c) Seuls les orthants portés par a , b et d contiennent des terminaux. D'après la définition de la grille, nous savons qu'il existe un terminal t_1 appartenant à l'hyperplan axe-parallèle passant par e et d , un terminal t_2 appartenant à l'hyperplan axe-parallèle passant par d et g , un terminal t_3 appartenant à l'hyperplan axe-parallèle H_3 passant par d et b , et un terminal t_b appartenant à $\text{Ort}(\Pi, b)$. Comme seuls les orthants portés par a , b et d contiennent des terminaux, nous déduisons que t_1 et t_2 appartiennent à $\text{Ort}(\Pi, d)$, et que t_3 appartient à $\text{Ort}(\Pi, b)$ ou $\text{Ort}(\Pi, d)$. Si l'intersection $\text{Ort}(\Pi, d) \cap H_3$ contient un terminal t' , nous déduisons, d'après le lemme de séparation, que b et d appartiennent à $\text{med}(T)$ à cause des terminaux t' , t_a et t_b . Dans ce cas, nous concluons que q appartient à $\mathcal{M}(T)$ car il est le sommet d'une cellule de dimension 2 dont seuls deux sommets diagonalement opposés appartiennent à $\text{med}(T)$ (il s'agit de la cellule de sommets f , b , q et d). Si l'intersection $\text{Ort}(\Pi, d) \cap H_3$ ne contient aucun terminal, nous déduisons que t_3 appartient à $\text{Ort}(\Pi, b) \cap H_3$ (Fig. 2.19.(b)). Dans ce cas, notons Π' la cellule de dimension 3 située juste en dessous de Π . Cette cellule existe car les terminaux t_1 et t_2 sont situés en dessous du plan H_3 . Soit b' , d' , f' et q' les sommets de Π' respectivement situés juste en dessous de b , d , f et q . Comme $\text{Ort}(\Pi, d) \cap H_3 = \emptyset$, nous déduisons que $\text{Ort}(\Pi, d) \cap T = \text{Ort}(\Pi', d') \cap T \neq \emptyset$. Si l'orthant $\text{Ort}(\Pi', b')$ n'est pas vide, d'après la position des terminaux, nous déduisons


 FIG. 2.20 – $\mathcal{P}_{d_1}(T) \neq \mathcal{M}(T)$ et $\mathcal{P}_{d_1}(T) \neq \mathcal{I}(T)$ dans \mathbb{R}^4

que b' domine q , une contradiction avec nos hypothèses. Dans le cas contraire, d'après le Lemme 2.2.14, nous concluons que b et d' sont les seuls sommets de Π' appartenant à $\text{med}(T)$ car seuls les orthants $\text{Ort}(\Pi', d')$ et $\text{Ort}(\Pi', b)$ contiennent des terminaux. Nous concluons que q appartient à $\mathcal{M}(T)$ car $\Pi' \subseteq \mathcal{M}(T)$ d'après la définition du complexe cubique $\mathcal{M}(T)$.

□

Cette proposition clôture la preuve du Théorème 2.2.1.

L'exemple qui suit montre que $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ ne coïncide pas nécessairement avec $\mathcal{I}(T)$ et $\mathcal{M}(T)$ dans \mathbb{R}^m quand $m \geq 4$. Cependant, il est possible de montrer que $\mathcal{P}_{d_1}(T) \subseteq \mathcal{I}(T) \subseteq \mathcal{M}(T)$ pour tout $T \subset \mathbb{R}^m$.

Exemple 2.2.2 *Il existe des ensembles $T \subset \mathbb{R}^m$, tel que $\mathcal{P}_{d_1}(T) \neq \mathcal{I}(T)$ et $\mathcal{P}_{d_1}(T) \neq \mathcal{M}(T)$.*

Preuve. Soit $p = (1, 1, 1, 1)$ et $q = (0, 0, 0, 0)$ les sommets diagonalement opposés de l'hypercube unité de dimension 4. Soit T l'ensemble des sommets t de l'hypercube tel que $d_1(p, t) \leq d_1(q, t)$ (Fig. 2.20). Pour cet ensemble de terminaux, l'hypercube appartient complètement à $\mathcal{M}(T)$ car tous ses sommets appartiennent à $\text{med}(T)$. L'ensemble $\mathcal{I}(T)$ coïncide également avec l'hypercube car les enveloppes des quatre projections sont des cubes de dimension 3. Par contre, le point q n'appartient pas $\mathcal{P}_{d_1}(T)$, car le point p le domine. □

2.2.8 Convexité et super-connexité (ou ℓ_1 -isométrie)

Durier et Michelot [28, 29] ont montré pour toute norme polyédrale que l'enveloppe de Pareto est un complexe cellulaire connexe. Nous montrons ici que l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ de terminaux de \mathbb{R}^3 à une propriété plus forte : la super-connexité [8, 10]. Un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^m$ est *super-connexe* (ou ℓ_1 -isométrique) si, pour toute paire de points $a, a' \in A$, il existe un ℓ_1 -chemin appartenant à A connectant a et a' . Nous montrons également que l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ est *axe-parallèle convexe* [33].

Lemme 2.2.18 (ℓ_1 -isométrie $\mathcal{M}(T)$ dans \mathbb{R}^3) *Pour tout ensemble $T \subset \mathbb{R}^3$, l'ensemble $\mathcal{M}(T)$ est ℓ_1 -isométrique.*

Preuve. Soit m_1 et m_2 deux points appartenant à $\mathcal{M}(T)$. Nous allons montrer qu'il existe un ℓ_1 -chemin entre m_1 et m_2 appartenant de $\mathcal{M}(T)$. Nous considérons les trois cas suivants :

- (a) $m_1, m_2 \in \text{med}(T)$. Soit Π le parallépipède axe-parallèle de diagonale $[m_1, m_2]$. Par induction, nous pouvons supposer que $\Pi \cap \text{med}(T) = \{m_1, m_2\}$. Nous pouvons remarquer que tout point médian m_3 appartient à $\text{Ort}(\Pi, m_1) \cup \text{Ort}(\Pi, m_2)$ car, dans le cas contraire, le point médian $m(m_1, m_2, m_3)$ serait différent de m_1 et m_2 , et il appartiendrait à Π . Comme $\text{med}(T) \subset \text{Ort}(\Pi, m_1) \cup \text{Ort}(\Pi, m_2)$, nous déduisons que Π est une cellule de la grille $G(T)$ et que celle-ci appartient à $\mathcal{M}(T)$ car uniquement deux sommets diagonalement opposés de Π appartiennent à $\text{med}(T)$. Nous concluons qu'il existe un ℓ_1 -chemin entre m_1 et m_2 appartenant à $\mathcal{M}(T)$.
- (b) $m_1 \notin \text{med}(T)$ et $m_2 \in \text{med}(T)$. D'après la définition de $\mathcal{M}(T)$, m_1 appartient à une cellule Π dont deux sommets diagonalement opposés appartiennent à $\text{med}(T)$, dont quatre sommets, extrémités d'arêtes opposées, appartiennent à $\text{med}(T)$, ou dont tous les sommets appartiennent à $\text{med}(T)$. Nous allons montrer la propriété pour le premier cas (dans les autres cas, la preuve est similaire). Soit a et b les deux sommets de Π diagonalement opposés appartenant à $\text{med}(T)$. D'après le Lemme 2.2.15 ou Lemme 2.2.14, nous déduisons que $T \subset \text{Ort}(\Pi, a) \cup \text{Ort}(\Pi, b)$. D'après la définition d'un point médian, nous avons également $\text{med}(T) \subset \text{Ort}(\Pi, a) \cup \text{Ort}(\Pi, b)$. Par conséquent, nous pouvons supposer sans perte de généralité que $m_2 \in \text{Ort}(\Pi, a)$. Comme $\Pi \subseteq \mathcal{M}(T)$, il existe un ℓ_1 -chemin L entre m_1 et a appartenant à $\mathcal{M}(T)$. D'après le cas (a), il existe également un ℓ_1 -chemin L' entre a et m_2 car m_2 et a appartiennent à $\text{med}(T)$. Nous concluons qu'il existe un ℓ_1 -chemin $L'' = L \cup L'$ entre m_1 et m_2 qui appartient $\mathcal{M}(T)$.
- (c) $m_1 \notin \text{med}(T)$ et $m_2 \notin \text{med}(T)$. Comme dans le cas précédent, m_1 appartient à une cellule Π dont deux sommets diagonalement opposés appartiennent à $\text{med}(T)$, dont quatre sommets, extrémités d'arêtes opposées, appartiennent à $\text{med}(T)$, ou dont tous les sommets appartiennent à $\text{med}(T)$. Nous allons montrer que la propriété est vraie si seulement deux sommets a et b de Π diagonalement opposés appartiennent à $\text{med}(T)$ dans les autres cas, la preuve est similaire). Si m_2 appartient à Π , nous déduisons qu'il existe un ℓ_1 -chemin entre m_1 et m_2 car $\Pi \subseteq \mathcal{M}(T)$. Dans le cas contraire, comme précédemment, nous pouvons supposer que m_2 appartient à $\text{Ort}(\Pi, a)$. Nous savons qu'il existe un ℓ_1 -chemin L entre m_1 et a appartenant à $\mathcal{M}(T)$ car $\Pi \subset \mathcal{M}(T)$, ainsi qu'un ℓ_1 -chemin L' entre a et m_2 appartenant à $\mathcal{M}(T)$ d'après le cas (b). Nous concluons qu'il existe un ℓ_1 -chemin $L'' = L \cup L'$ entre m_1 et m_2 qui appartient $\mathcal{M}(T)$.

□

Comme $\mathcal{P}_{d_1}(T) = \mathcal{M}(T)$ dans \mathbb{R}^3 , nous déduisons le corollaire suivant.

Corollaire 2.2.3 (ℓ_1 -isométrie $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ dans \mathbb{R}^3) *Pour tout ensemble $T \subset \mathbb{R}^3$, l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ est ℓ_1 -isométrique.*

Du fait que $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ est ℓ_1 -isométrique, nous avons également la propriété suivante :

Corollaire 2.2.4 *Pour tout $T \subset \mathbb{R}^3$, l'intersection de l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ avec un plan axe-parallèle est ℓ_1 -isométrique.*

A présent, nous montrons que l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ est axe-parallèle convexe.

Lemme 2.2.19 (Convexité axe-parallèle) *Pour tout $T \subset \mathbb{R}^m$, l'intersection $\ell \cap \mathcal{P}_{d_1}(T)$ d'une droite ℓ axe-parallèle avec l'enveloppe $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ est convexe, i.e., c'est un segment, un point, ou l'ensemble vide.*

Preuve. Soit $[p, q]$ un segment axe-parallèle tel que $p, q \in \mathcal{P}_{d_1}(T)$. Pour établir la convexité axe-parallèle, il suffit de montrer que le segment $[p, q]$ appartient à $\mathcal{P}_{d_1}(T)$. D'après le Lemme 2.2.7, nous déduisons que c'est le cas car $[p, q]$ est un parallépipède axe-parallèle de dimension 1 dont les sommets appartiennent à $\mathcal{P}_{d_1}(T)$. \square

2.3 Enveloppe de Pareto dans l'espace (\mathbb{R}^m, d_∞)

Nous montrons dans cette section que l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_{d_\infty}(T)$ coïncide avec l'ensemble $\Upsilon_{d_\infty}(T)$ dans \mathbb{R}^m . Nous donnons deux preuves permettant d'établir ce résultat. La première, la plus simple, est basée sur le fait que l'espace métrique (\mathbb{R}^m, d_∞) vérifie la propriété de Helly. La seconde, qui fut notre première preuve, est basée sur le fait que l'espace (\mathbb{R}^m, d_∞) est injectif. En utilisant ce résultat, nous obtenons une caractérisation par des cônes de $\mathcal{P}_{d_\infty}(T)$ et deux caractérisations de $\mathcal{P}_{d_\infty}^0(T)$.

2.3.1 Caractérisation dans \mathbb{R}^2

Les espaces métriques (\mathbb{R}^2, d_1) et (\mathbb{R}^2, d_∞) sont isomorphes : l'un est obtenu à partir de l'autre par une rotation de $\frac{\pi}{4}$ et par dilatation (Fig. 2.21). Pour cette raison, il est possible de construire

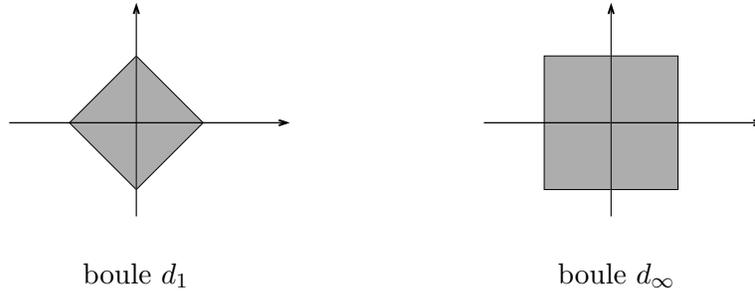
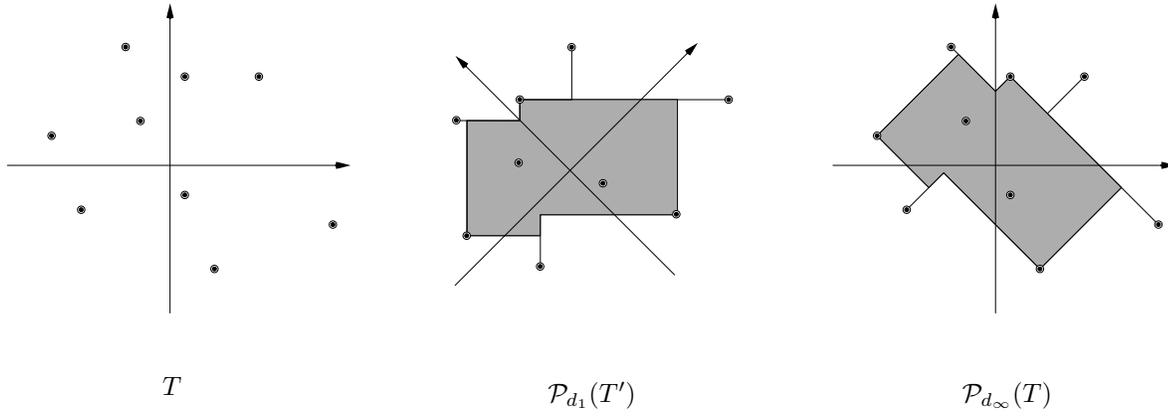


FIG. 2.21 – Isomorphisme des boules d_1 et d_∞

l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_{d_\infty}(T)$ dans le plan en utilisant les algorithmes de construction de $\mathcal{P}_{d_1}(T)$. Pour cela, il suffit d'appliquer une rotation de $\frac{\pi}{4}$ à l'ensemble T pour obtenir un ensemble T' , de construire l'enveloppe $\mathcal{P}_{d_1}(T')$, puis d'appliquer une rotation de $-\frac{\pi}{4}$ sur celle-ci (Fig. 2.22). Remarquons, d'après cet isomorphisme, que la caractérisation de Chalmet *et al.* s'applique donc à l'enveloppe $\mathcal{P}_{d_\infty}(T)$ et que l'ensemble $\mathcal{M}(T)$ peut également caractériser l'enveloppe si nous adaptons la définition d'un point médian.

2.3.2 Caractérisation dans \mathbb{R}^m

Un espace métrique vérifie la *propriété de Helly*, si toute famille de boules fermées $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ qui s'intersectent deux à deux possède une intersection non-vide, i.e., si $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j \neq \emptyset$ pour


 FIG. 2.22 – Construction de $\mathcal{P}_{d_\infty}(T)$ par rotation

tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$, alors $\bigcap_{k=1}^n \mathcal{B}_k \neq \emptyset$. L'espace métrique (\mathbb{R}^m, d_∞) vérifie la propriété de Helly car les boules fermées sont des cubes axe-parallèles. Nous allons montrer, à l'aide de cette propriété, que $\mathcal{P}_{d_\infty}(T) = \Upsilon_{d_\infty}(T)$ pour tout terminaux $T \subset \mathbb{R}^m$.

Soit B la boule unitaire centrée en l'origine 0. Pour toute coordonnée $i \in \{1, \dots, m\}$, soit $F_i^+ = \{x \in B : x^i = 1\}$ et $F_i^- = \{x \in B : x^i = -1\}$ les deux faces opposées du cube B orthogonales à l'axe i . Nous notons C_+^i et C_-^i les cônes de sommet 0 respectivement générés par les faces F_i^+ et F_i^- . Pour tout point $p \in \mathbb{R}^m$, nous notons

$$C_+^i(p) = p + C_+^i \text{ et } C_-^i(p) = p + C_-^i$$

les deux cônes d'origine p obtenus par une translation de C_+^i et C_-^i . Ces deux cônes peuvent également être définis de la façon suivante :

$$\begin{aligned} C_+^i(p) &= \{x \in \mathbb{R}^m : x^i \geq p^i \text{ et } d_\infty(p, x) = |p^i - x^i|\}, \\ C_-^i(p) &= \{x \in \mathbb{R}^m : x^i \leq p^i \text{ et } d_\infty(p, x) = |p^i - x^i|\}. \end{aligned}$$

En utilisant ces cônes, nous pouvons reformuler la caractérisation des intervalles d'un espace normé donné par Boltyanski et Soltan [16] (Fig. 2.23).

Lemme 2.3.1 *Soit $p, q \in \mathbb{R}^m$, tel que $d_\infty(p, q) = p^i - q^i$ ($p^i \geq q^i$). Alors, nous avons*

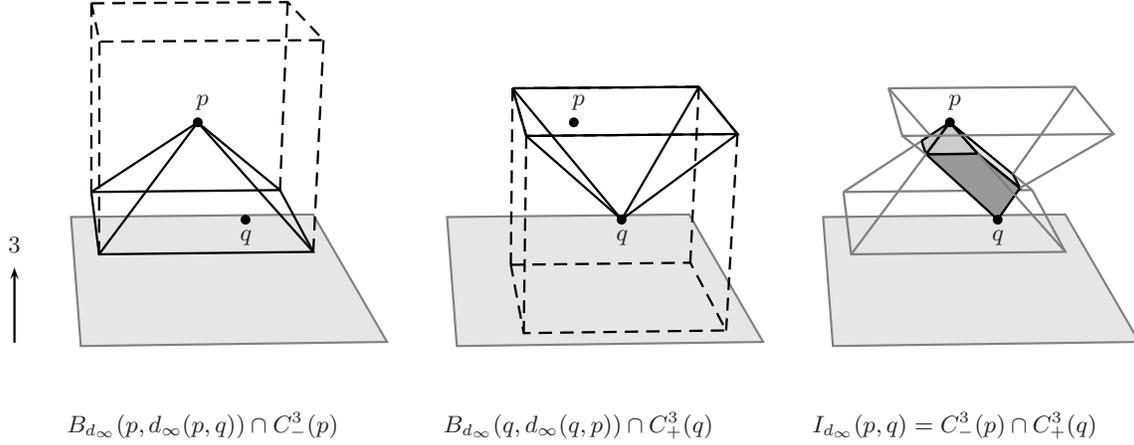
$$I_{d_\infty}(p, q) = C_-^i(p) \cap C_+^i(q).$$

En particulier, $x \in I_{d_\infty}(p, q)$ si et seulement si $p \in C_+^i(x)$ et $q \in C_-^i(x)$.

A présent, nous établissons la caractérisation principale des enveloppes de Pareto dans l'espace métrique (\mathbb{R}^m, d_∞) .

Théorème 2.3.1 *Pour tout ensemble $T \subset \mathbb{R}^m$, nous avons $\mathcal{P}_{d_\infty}(T) = \Upsilon_{d_\infty}(T)$.*

Preuve. D'après la Proposition 2.1.1, $\Upsilon_{d_\infty}(T) \subseteq \mathcal{P}_{d_\infty}(T)$. Il reste donc à montrer que si $q \notin \Upsilon_{d_\infty}(T)$, alors $q \notin \mathcal{P}_{d_\infty}(T)$. Comme q n'appartient pas à $\Upsilon_{d_\infty}(T)$, nous savons qu'il existe un


 FIG. 2.23 – Définition géométrique de l'intervalle $I_{d_\infty}(p, q)$

terminal t_i tel que $q \notin \cup_{j=1}^n I_{d_\infty}(t_i, t_j)$, i.e., $d_\infty(t_i, t_j) < d_\infty(t_i, q) + d_\infty(q, t_j)$ pour tout terminal t_j . Cela signifie que $\varepsilon := \min\{d_\infty(t_i, q) + d_\infty(q, t_j) - d_\infty(t_i, t_j)\} > 0$. Pour chaque terminal $t_k \in T$, nous notons $r_k = d_\infty(t_k, q)$ si $t_k \neq t_i$ et $r_k = d_\infty(t_k, q) - \varepsilon$ si $t_k = t_i$. Soit $B = \cap_{k=1}^n \mathcal{B}_{d_\infty}(t_k, r_k)$ l'intersection des n boules fermées centrées chacune en un terminal. Nous allons montrer que l'intersection de toutes ces boules est non-vide, et donc que le point q est dominé. Comme q appartient à $\mathcal{B}_{d_\infty}(t_k, r_k)$ pour tout $k \neq i$, nous déduisons que les boules $\mathcal{B}_{d_\infty}(t_j, r_j)$ et $\mathcal{B}_{d_\infty}(t_{j'}, r_{j'})$ s'intersectent pour tout $j, j' \neq i$. Pour tout terminal t_j , les boules $\mathcal{B}_{d_\infty}(t_i, r_i)$ et $\mathcal{B}_{d_\infty}(t_j, r_j)$ s'intersectent également car

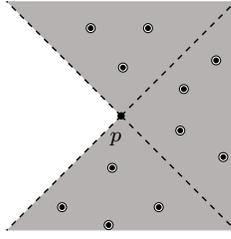
$$\begin{aligned} r_i + r_j &= d_\infty(t_i, q) - \varepsilon + d_\infty(t_j, q) = d_\infty(t_i, q) + d_\infty(q, t_j) - \varepsilon \\ &\geq d_\infty(t_i, q) + d_\infty(q, t_j) - (d_\infty(t_i, q) + d_\infty(q, t_j) - d_\infty(t_i, t_j)) \\ &\geq d_\infty(t_i, t_j). \end{aligned}$$

Comme l'espace (\mathbb{R}^m, d_∞) vérifie la propriété de Helly et que les boules définissant B s'intersectent deux à deux, nous déduisons que $B \neq \emptyset$. Par conséquent, comme q n'appartient pas à $\mathcal{B}_{d_\infty}(t_i, r_i)$ et donc à B , nous concluons que q est dominé par tout point de p appartenant à B . \square

Un cône \mathcal{C} est qualifié de *vide* s'il ne contient pas de terminal, i.e., $\mathcal{C} \cap T = \emptyset$. En utilisant le Lemme 2.3.1, nous pouvons reformuler le Théorème 2.3.1 de la façon suivante.

Corollaire 2.3.1 *Un point p de \mathbb{R}^m appartient à l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_{d_\infty}(T)$ si et seulement si, pour tout indice $i \in \{1, \dots, m\}$, les deux cônes $C_+^i(p)$ et $C_-^i(p)$ sont tous les deux vides ou tous les deux non-vides.*

Preuve. Si $p \in \mathcal{P}_{d_\infty}(T)$, nous déduisons d'après le Théorème 2.3.1 qu'il existe, pour tout terminal t_i , un terminal t_j tel que $p \in I_{d_\infty}(t_i, t_j)$. D'après le Lemme 2.3.1, cela équivaut à dire que, pour tout terminal t_i , il existe un terminal t_j tel que t_i et t_j se situent dans deux cônes opposés d'origine p . Cela montre la première implication. Réciproquement, si $p \notin \mathcal{P}_{d_\infty}(T)$, nous déduisons d'après le Théorème 2.3.1 qu'il existe un terminal t_i tel que $p \notin \cup_{j=1}^n I_{d_\infty}(t_i, t_j)$. De nouveau,


 FIG. 2.24 – L'ensemble $\mathcal{C}(p)$ pour un point p de \mathbb{R}^2

d'après le Lemme 2.3.1, nous déduisons qu'il existe un indice k tel que $t_i \in C_+^k(p)$ et $C_-^k(p) \cap T = \emptyset$, ou tel que $t_i \in C_-^k(p)$ et $C_+^k(p) \cap T = \emptyset$. Cela démontre la seconde implication. \square

A présent, nous allons donner une caractérisation de l'enveloppe de Pareto stricte $\mathcal{P}_{d_\infty}^0(T)$. Pour cela, nous introduisons un ensemble noté $\mathcal{C}(T)$ et un autre ensemble noté $\mathcal{U}(T)$. Pour tout point $p \in \mathbb{R}^m$, nous notons $\mathcal{C}(p)$ l'union de tous les cônes non vides d'origine p de la forme $C_+^i(p)$ ou $C_-^i(p)$ (Fig. 2.24). L'ensemble $\mathcal{C}(T)$ est obtenu de la façon suivante :

$$\mathcal{C}(T) = \bigcap_{p \in \mathbb{R}^m} \mathcal{C}(p).$$

Pour tout indice $i \in \{1, \dots, m\}$, nous notons $\mathcal{U}_+^i(T) = \bigcup_{j=1}^n C_+^i(t_j)$ et $\mathcal{U}_-^i(T) = \bigcup_{j=1}^n C_-^i(t_j)$. L'ensemble $\mathcal{U}(T)$ est obtenu en effectuant l'intersection de ces $2m$ ensembles (Fig 2.25) :

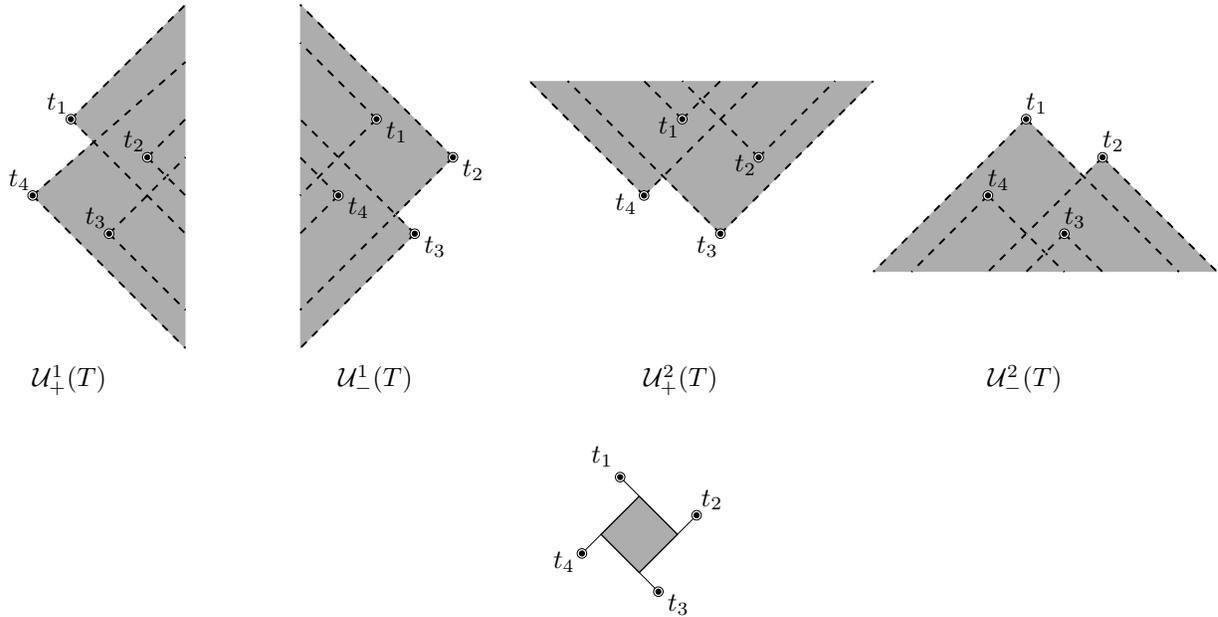
$$\mathcal{U}(T) = \bigcap_{i=1}^m (\mathcal{U}_+^i(T) \cap \mathcal{U}_-^i(T)).$$

Théorème 2.3.2 *Pour tout ensemble $T \in \mathbb{R}^m$, nous avons*

$$\mathcal{P}_{d_\infty}^0(T) = \mathcal{U}(T) = \mathcal{C}(T).$$

Preuve. Montrons dans un premier temps que $\mathcal{U}(T) \subseteq \mathcal{C}(T)$. Supposons par contradiction qu'un point q appartienne à $\mathcal{U}(T)$ et pas à $\mathcal{C}(T)$. Par conséquent, il existe un point p tel que $q \notin \mathcal{C}(p)$. Nous pouvons donc supposer, sans perte de généralité, qu'il existe un $i \in \{1, \dots, m\}$ tel que $q \in C_+^i(p)$ et tel que $C_+^i(p) \cap T = \emptyset$. Dans ce cas, le cône $C_+^i(q)$ est également vide. Par conséquent, $q \notin \mathcal{U}_-^i(T)$ car tous les cônes de la forme $C_-^i(t_j)$ contenant q ont leur origine dans le cône $C_+^i(q)$ et que celui-ci est vide. Cela contredit le fait que q appartient à $\mathcal{U}(T)$.

Pour établir que $\mathcal{C}(T) \subseteq \mathcal{P}_{d_\infty}^0(T)$, montrons que si un point $p \notin \mathcal{P}_{d_\infty}^0(T)$, alors que $p \notin \mathcal{C}(T)$. Nous allons distinguer le cas où $p \notin \mathcal{P}_{d_\infty}(T)$ et le cas contraire. Si $p \notin \mathcal{P}_{d_\infty}(T)$, d'après le Corollaire 2.3.1, nous pouvons supposer, sans perte de généralité, qu'il existe une coordonnée i tel que $C_+^i(p) \cap T = \emptyset$ et $C_-^i(p) \cap T \neq \emptyset$. Dans ce cas, à partir de p , il est possible d'obtenir un point p' tel que $C_+^i(p') \cap T = \emptyset$ en diminuant de façon appropriée la coordonnée i du point p . Comme p appartient à l'intérieur du cône $C_+^i(p')$, nous déduisons que $p \notin \mathcal{C}(T)$. Considérons à présent le cas où $p \in \mathcal{P}_{d_\infty}(T)$. Comme $p \notin \mathcal{P}_{d_\infty}^0(T)$, nous savons qu'il existe un point q avec le même vecteur de distance que p . Comme les points p et q appartiennent, pour tout terminal t_i , à la boule $\mathcal{B}_{d_\infty}(t_i, d(t_i, p) = d(t_i, q))$, et que l'intersection de toutes ces boules est un parallélogramme axe-parallèle, nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que p et q diffèrent sur une seule coordonnée i . Supposons sans perte de généralité que $q^i < p^i$. Notons que le cône $C_+^i(p)$ doit être vide car, d'après le Lemme 2.3.1, n'importe quel terminal situé dans ce



$$\mathcal{U}(T) = \mathcal{U}_+^1(T) \cap \mathcal{U}_-^1(T) \cap \mathcal{U}_+^2(T) \cap \mathcal{U}_-^2(T)$$

 FIG. 2.25 – L'ensemble $\mathcal{U}(T)$ dans \mathbb{R}^2

cône est plus proche de p que de q . De la même manière $C_-^i(q) \cap T = \emptyset$. Par conséquent, il est possible de choisir un point p'' sur le segment $[p, q]$, suffisamment proche de p , tel $C_+^i(p'') \cap T = \emptyset$ et tel que p appartienne à l'intérieur de $C_+^i(p'')$. Cela montre que $p \notin \mathcal{C}(T)$ et donc que l'inclusion $\mathcal{C}(T) \subseteq \mathcal{P}_{d_\infty}^0(T)$ est vérifiée.

Pour terminer, il faut établir que $\mathcal{P}_{d_\infty}^0(T) \subseteq \mathcal{U}(T)$. Pour cela, montrons que si un point $p \notin \mathcal{U}(T)$, alors $p \notin \mathcal{P}_{d_\infty}^0(T)$. Comme $p \notin \mathcal{U}(T)$, nous pouvons supposer, sans perte de généralité, qu'il existe un indice $i \in \{1, \dots, m\}$ tel que $p \notin \mathcal{U}_i^-(T)$. Cela signifie que le cône $C_+^i(p)$ est vide. Comme p appartient à l'enveloppe de Pareto, nous déduisons du Corollaire 2.3.1 que le cône $C_-^i(p)$ est également vide. D'après la définition des cônes $C_+^i(p)$ et $C_-^i(p)$, nous déduisons que $d_\infty(t_j, p) > |t_j^i - p^i|$ pour tout terminal t_j . Par conséquent, l'intersection de la boule $\mathcal{B}_{d_\infty}(t_j, d_\infty(t_j, p))$ avec la droite L parallèle à l'axe i passant par p est un segment non-dégénéré contenant le point p dans son intérieur. Par conséquent, l'intersection des boules $\mathcal{B}_{d_\infty}(t_1, d_\infty(t_1, p)), \dots, \mathcal{B}_{d_\infty}(t_n, d_\infty(t_n, p))$ avec L est un segment $[p', p'']$ contenant p . Tous les points de ce segment possèdent le même vecteur de distances que le point p . Cela montre que $p \notin \mathcal{P}_{d_\infty}^0(T)$ et donc que $\mathcal{P}_{d_\infty}^0(T) \subseteq \mathcal{U}(T)$. \square

Corollaire 2.3.2 *Un point p de \mathbb{R}^m appartient à $\mathcal{P}_{d_\infty}^0(T)$ si et seulement si les cônes $C_+^i(p)$ et $C_-^i(p)$ sont non vides pour tout indice $i \in \{1, \dots, m\}$.*

2.3.3 Liens avec les enveloppes injectives

Soit $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble de n éléments et d une distance définie sur cet ensemble, i.e., (X, d) est un espace métrique fini. Nous notons $\mathcal{K}_d(X)$ l'ensemble des points $u \in \mathbb{R}^n$ tel qu'il est possible de construire un triangle de côtés u_i, u_j et $d(p_i, p_j)$ pour toute paire d'indices

distincts $i, j \in \{1, \dots, n\}$, i.e., $|u_i - u_j| \leq d(p_i, p_j) \leq u_i + u_j$. L'ensemble $\mathcal{K}_d(X)$ est un polyèdre convexe non-borné de \mathbb{R}_+^n . Ce polyèdre muni de la distance d_∞ est appelé *extension* de l'espace métrique (X, d) pour la raison suivante.

Lemme 2.3.2 *Soit ϕ l'application de X dans \mathbb{R}^n tel que $\phi(x) = (d(x, x_1), \dots, d(x, x_n))$. Pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$, nous avons $d(x_i, x_j) = d_\infty(\phi(x_i), \phi(x_j))$.*

Pour tout $u, v \in \mathcal{K}_d(X)$, nous notons $u \preceq v$ le fait que $u_i \leq v_i$ pour tout indice $i \in \{1, \dots, n\}$. L'ensemble des points de $\mathcal{K}_d(X)$ minimaux pour la relation d'ordre partiel \preceq est noté $\mathcal{E}_d(X)$. Il a été montré dans [26] que $\mathcal{E}_d(X)$ est constitué de toutes les faces compactes du polyèdre $\mathcal{K}_d(X)$. L'ensemble $\mathcal{E}_d(X)$ muni de la distance d_∞ est appelé *enveloppe injective* (ou *enveloppe convexe* ou *extension serrée*) de l'espace métrique (X, d) . Ce concept, qui a été indépendamment découvert par plusieurs auteurs [21, 26, 43], possède plusieurs propriétés intéressantes comme la ℓ_∞ -isométrie.

Une application non-expansive d'un espace métrique (Y, d') dans un espace métrique (Z, d'') est une fonction $f : Y \rightarrow Z$ tel que $d''(f(x), f(y)) \leq d'(x, y)$ pour tout $x, y \in Y$. Un espace métrique (Z, d'') est *injectif* si, pour tout espace métrique (Y, d') et pour tout sous-espace $Y' \subset Y$ tel qu'il existe une application non-expansive f' de (Y', d') dans (Z, d'') , il existe une application non-expansive f , extension de f' , de (Y, d') dans (Z, d'') . L'ensemble $\mathcal{E}_d(X)$ est appelé *enveloppe injective* car c'est un espace injectif. Dans [1], il est montré qu'*un espace métrique (X, d) est injectif si et seulement si il vérifie la propriété de Helly*. L'espace (\mathbb{R}^m, d_∞) est donc un espace injectif. Afin de donner une nouvelle preuve du Théorème 2.3.1, nous utilisons cette propriété ainsi que la caractérisation suivante.

Lemme 2.3.3 [26, 43] *Un point $u \in \mathcal{K}_d(X)$ est un point de $\mathcal{E}_d(X)$ si et seulement si pour tout $x_i \in X$ il existe un point $x_j \in X$ tel que $u_i + u_j = d(x_i, x_j)$.*

Nous pouvons à présent donner une nouvelle preuve du Théorème 2.3.1.

Preuve. D'après le Lemme 2.1.1, nous savons que $\Upsilon_{d_\infty}(T) \subseteq \mathcal{P}_{d_\infty}(T)$. Il reste donc à montrer l'inclusion inverse. Pour cela, notons d la restriction de la métrique d_∞ à l'ensemble T et considérons l'enveloppe injective de l'espace métrique (T, d) . Comme l'espace métrique (\mathbb{R}^m, d_∞) est injectif, il contient le sous-espace $\mathcal{E}_d(T)$. Nous remarquons que l'application identité id est non-expansive pour l'espace métrique $(\mathcal{E}_d(T), d_\infty)$ sur lui-même. Il existe donc une application non-expansive f de (\mathbb{R}^m, d_∞) dans $(\mathcal{E}_d(T), d_\infty)$. Pour tout $p \in \mathbb{R}^m$, nous avons $d_\infty(f(p), t_i) \leq d_\infty(p, t_i)$ pour tout terminal $t_i \in T$. Si au moins une de ces inégalités est stricte, alors $f(p) \succ p$ et donc $p \notin \mathcal{P}_{d_\infty}(T)$. Dans le cas contraire, $d_\infty(f(p), t_i) = d_\infty(p, t_i)$ pour tout terminal $t_i \in T$, et par conséquent p et $f(p)$ ont le même vecteur de distance au point de l'ensemble T . Comme $\mathcal{E}_d(T) \subseteq \Upsilon_{d_\infty}(T)$ d'après le Lemme 2.3.3, nous déduisons que le point p appartient également à $\Upsilon_{d_\infty}(T)$. Nous avons donc montré que si p n'est pas dominé, alors il appartient à $\Upsilon_{d_\infty}(T)$. \square

Dans la littérature, plusieurs auteurs se sont intéressés à la forme de l'enveloppe injective associée à un espace métrique fini (X, d) [26, 63]. Pour des espaces sur six éléments, il est montré que le nombre de formes différentes est constant malgré un nombre infini de distances :

- $|X| = 2$, $\mathcal{E}(X)$ est le segment dont les extrémités sont les deux points de X ;
- $|X| = 3$, $\mathcal{E}(X)$ est constitué de trois segments qui forment un Y et dont les extrémités sont les points de X ;

- $|X| = 4$, $\mathcal{E}(X)$ est constitué d'un rectangle et de quatre segments reliant chacun un sommet du rectangle à un sommet de X ;
- $|X| = 5$, il existe trois représentations canoniques de $\mathcal{E}(X)$;
- $|X| = 6$, il existe 339 formes canoniques de $\mathcal{E}(X)$.

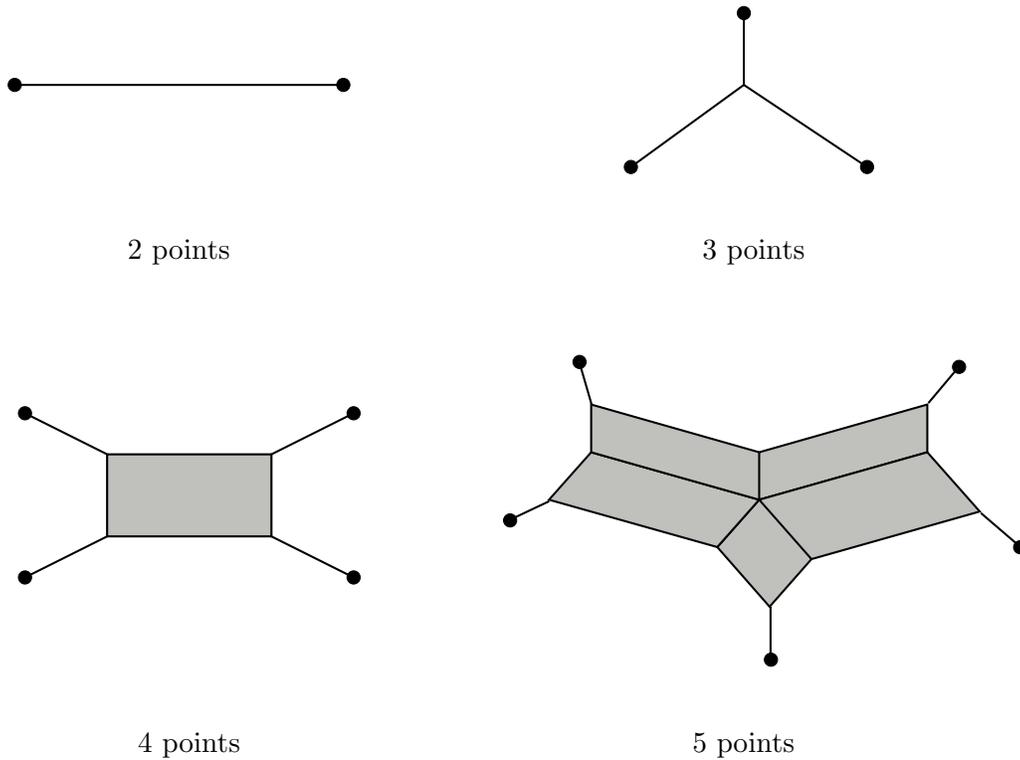


FIG. 2.26 – L'enveloppe injective de 2, 3, 4 et 5 points

La Figure 2.26 représente certaines formes de enveloppe injective. Il serait intéressant d'utiliser l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_{d_\infty}(T)$ afin de lister ces différentes formes pour des espaces de plus de six points.

Chapitre 3

Algorithmes de construction dans \mathbb{R}^2 pour d_1 et d_∞

Les enveloppes de Pareto $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ et $\mathcal{P}_{d_\infty}(T)$ d'un ensemble de terminaux du plan peuvent être construites en temps optimal en temps $O(n \log n)$ par l'algorithme proposé par Chalmet *et al.* [18]. Cependant, cet algorithme est basé sur la caractérisation donnée par le Théorème 2.1.1 qui ne s'étend pas en dimension 3 comme le montre le Contre-exemple 2.1.1. Dans ce chapitre, nous présentons un algorithme différent mais aussi efficace pour construire $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ et $\mathcal{P}_{d_\infty}(T)$ dans le plan. Dans le chapitre 4, nous montrerons que cet algorithme peut être adapté pour calculer l'enveloppe de Pareto en dimension 3. Notons que les algorithmes de construction des enveloppes $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ et $\mathcal{P}_{d_\infty}(T)$ sont identiques à l'orientation près. Par conséquent, nous présentons uniquement les algorithmes de construction de $\mathcal{P}_{d_1}(T)$.

3.1 Pré-traitements

Nous avons établi précédemment plusieurs propriétés des enveloppes de Pareto liées à la grille unitaire. Afin d'exploiter efficacement ces propriétés d'un point de vue algorithmique, nous introduisons deux traitements qui seront effectués au début de tous les algorithmes. Le premier consiste à calculer les *coordonnées unitaires* de l'ensemble T , et le second à construire une structure de données représentant la grille.

Comme nous l'avons vu précédemment, la grille $G(T)$ est définie par les droites horizontales et verticales passant par chaque terminal. À partir de maintenant, nous nommons *palier* chacune de ces droites. Nous numérotions les paliers verticaux par abscisses croissantes et les paliers horizontaux par ordonnées croissantes. En *coordonnées unitaires*, l'abscisse d'un terminal est égale au numéro du palier vertical auquel il appartient, et son ordonnée est égale au numéro du palier horizontal auquel il appartient. Par définition, notons que les coordonnées unitaires des terminaux sont des valeurs entières comprises entre 1 et n .

Passage en coordonnées unitaires. Les algorithmes de construction de $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ que nous allons présenter utilisent la représentation en coordonnées unitaires des terminaux. Pour tous les terminaux ces coordonnées peuvent être calculées en temps $O(n \log n)$ en utilisant un tri en même temps qu'une table de correspondance qui associe à chaque coordonnée unitaire la coordonnée réelle correspondante. Cette table permettra, une fois l'enveloppe calculée avec les coordonnées unitaires, de passer en coordonnées réelles.

Calcul de la structure grille. La *structure grille* est composée de deux tableaux T-Pal₁ et T-Pal₂ de sous-ensembles de terminaux. Pour chaque tableau T-Pal_i et chaque valeur $j \in \{1, \dots, n\}$, T-Pal_i[j] désigne les terminaux appartenant au $j^{\text{ème}}$ palier de la $i^{\text{ème}}$ coordonnée. La Figure 3.1 représente certaines valeurs de ces deux tableaux.

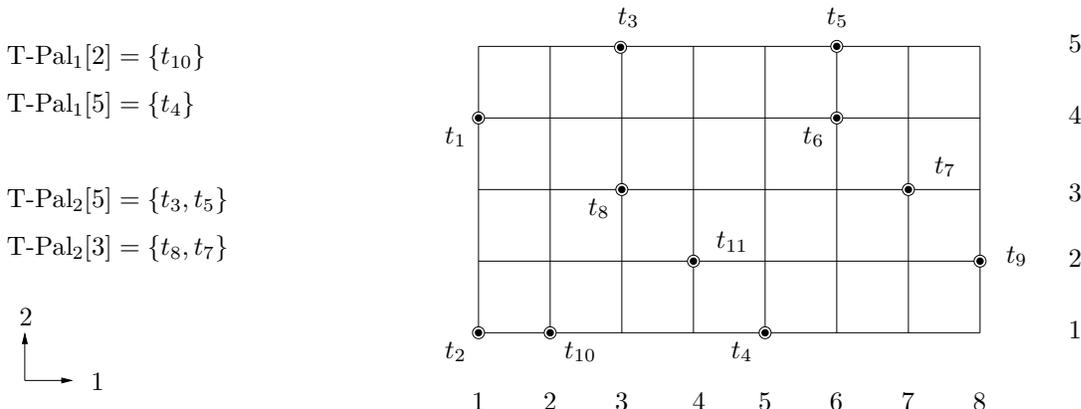


FIG. 3.1 – La structure grille

Lemme 3.1.1 *La construction de la structure grille s'effectue en temps $O(n \log n)$.*

Preuve. Il faut d'abord passer en coordonnées unitaires, en temps $O(n \log n)$, puis insérer chaque terminal à sa position dans les deux tableaux. Comme cette insertion s'effectue en temps constant, nous déduisons que la construction de la structure s'effectue en temps $O(n \log n)$. \square

3.2 Un algorithme par balayage

Afin de se familiariser avec la géométrie de l'enveloppe $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ dans \mathbb{R}^2 , nous décrivons un algorithme par balayage permettant de la construire. Cet algorithme, appelé **BalayageR2L1**, est une version simplifiée de celui proposé par Chalmet *et al.* [18]. Pour cette raison, nous ne démontrerons pas ici que celui-ci est correct.

L'algorithme consiste à construire quatre listes ordonnées de segments S_1, \dots, S_4 . Chacune de ces listes décrit une *chaîne* de segments délimitant la frontière de $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ (deux segments consécutifs d'une même liste ont une extrémité en commun).

La chaîne S_1 forme une sorte d'*escalier* allant du terminal le plus à gauche parmi les terminaux les plus hauts, jusqu'au terminal le plus haut parmi les terminaux les plus à droite. Les trois autres chaînes S_2, S_3 et S_4 sont définies de la même manière à partir des terminaux qui sont les plus bas ou les plus à gauche (Fig. 3.2).

Pour construire la chaîne S_1 (Alg.3.1), les terminaux sont dans un premier temps triés par ordonnées décroissantes et en cas d'égalité par abscisses croissantes. Ensuite, ils sont balayés dans l'ordre. À tout instant donné de l'algorithme, d désigne le dernier terminal ayant été introduit dans la chaîne (au début d est initialisé à t_1). Lorsque le terminal t_i est considéré, un ou deux segments sont ajoutés à S_1 quand $t_i^1 > d^1$:

- le segment $[d, t_i]$ si $t_i^2 = d^2$ (lignes 5–8) ;

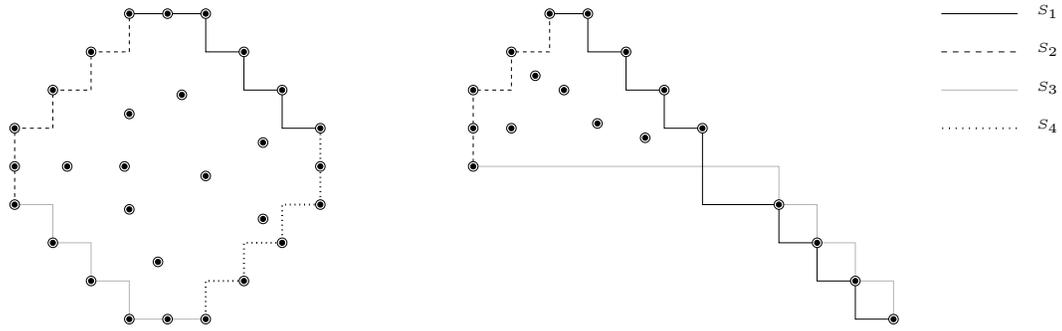


FIG. 3.2 – Les quatre chaînes

- les segments $[d, (d^1, t_i^2)]$ et $[(d^1, t_i^2), t_i]$ si $t_i^2 < d^2$ (lignes 9–12).

Avant de considérer le terminal t_{i+1} , le terminal courant d est mis à jour (lignes 7 et 11) si au moins un segment a été ajouté. Pour construire les autres chaînes, il suffit simplement d'inverser l'ordre de balayage de l'algorithme.

ConstructionChaineS1

- 1 Trier et numéroter les terminaux par ordonnées décroissantes et abscisses croissantes en cas d'égalité
 - 2 $S_1 := \emptyset$
 - 3 $d := t_1$
 - 4 **pour** $i := 2$ à n **faire**
 - 5 **si** $t_i^1 > d^1$ **et** $t_i^2 = d^2$ **alors**
 - 6 $S_1 := S_1 \cup [d, t_i]$
 - 7 $d := t_i$
 - 8 **fin**
 - 9 **si** $t_i^1 > d^1$ **et** $t_i^2 < d^2$ **alors**
 - 10 $S_1 := S_1 \cup [d, (d^1, t_i^2)] \cup [(d^1, t_i^2), t_i]$
 - 11 $d := t_i$
 - 12 **fin**
 - 13 **fin**
-

Alg. 3.1 – ConstructionChaineS1

Lemme 3.2.1 *Pour tout $T \subset \mathbb{R}^2$, l'algorithme BalayageR2L1 construit $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ en temps $O(n \log n)$.*

Preuve. Pour construire chacune des chaînes, l'algorithme effectue un tri en fonction de l'orientation de celle-ci et un parcours des terminaux. La complexité de l'algorithme est donc celle du tri, soit $O(n \log n)$. Nous ne montrons pas que l'algorithme construit l'enveloppe de Pareto car la preuve suit celle de Chalmet *et al.* [18]. \square

Nous pouvons noter que l'algorithme BalayageR2L1 construit l'enveloppe de Pareto en temps $O(n)$ si les données sont triées par abscisses et par ordonnées en entrée de l'algorithme.

Comme nous pouvons le voir sur l'exemple de droite de la Figure 3.2, les quatre chaînes peuvent se croiser. Pour cette raison, si nous considérons une arête de la frontière, il n'est pas possible de savoir de quel côté se trouve l'intérieur de l'enveloppe sans effectuer un traitement supplémentaire. L'algorithme de Chalmet *et al.* [18] permet d'obtenir cette information. Comme l'algorithme de construction de l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ dans \mathbb{R}^3 utilise cette information, nous décrivons à présent une structure de données permettant de la calculer à partir des segments de la frontière de l'enveloppe construits par l'algorithme `BalayageR2L1` ou par l'algorithme `CerclageR2L1` que nous décrirons par la suite. Nous allons calculer une *représentation par bandes et par paliers* de $\mathcal{P}_{d_1}(T)$. Nous appelons *bande* la région du plan délimitée par deux paliers parallèles consécutifs. La représentation consiste à stocker en mémoire la forme de l'intersection de $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ avec chaque palier et chaque bande.

Pour les paliers orthogonaux à l'axe 1, la structure est constituée de deux tableaux d'entiers notés `Min-Pal1` et `Max-Pal1`. Pour le $j^{\text{ème}}$ palier orthogonal à l'axe 1, `Min-Pal1[j]` désigne la valeur de la coordonnée 2 du point le plus bas du palier appartenant à $\mathcal{P}_{d_1}(T)$, et `Max-Pal1[j]` désigne celle du point le plus haut. De même, deux autres tableaux notés `Min-Pal2` et `Max-Pal2` sont utilisés pour les paliers orthogonaux à l'axe 2. Pour les bandes, sur le même principe, quatre tableaux notés `Min-Band1`, `Max-Band1`, `Min-Band2` et `Max-Band2` sont également utilisés. Sur

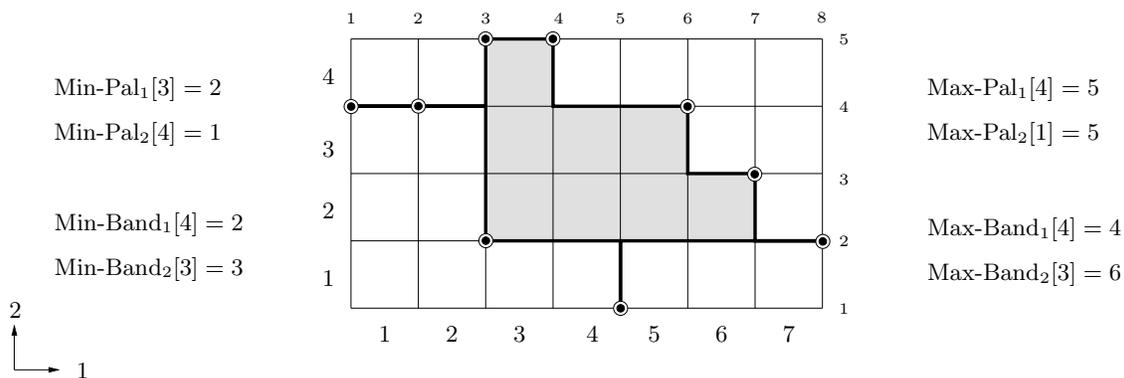


FIG. 3.3 – La représentation par bandes et par paliers

la Figure 3.3, nous avons donné certaines valeurs de ces différents tableaux.

Lemme 3.2.2 *La représentation par bandes et par paliers peut être calculée en temps $O(n \log n)$.*

Preuve. Il faut dans un premier temps calculer la structure grille et construire les segments appartenant à la frontière de l'enveloppe de Pareto, soit $O(n \log n)$. Ensuite, il suffit de considérer chaque segment et de mettre à jour les valeurs minimales et maximales des bandes et des paliers qu'intersectent le segment considéré. Comme un segment appartient à un seul palier et que seuls deux segments intersectent une même bande, nous déduisons que le calcul de toutes les valeurs s'effectue globalement en $O(n)$. \square

3.3 Masque d'un sommet de la grille

L'algorithme par cerclage présenté dans la section suivante nécessite de savoir déterminer si un sommet de la grille unitaire appartient ou non à l'enveloppe de Pareto. Pour réaliser

efficacement cette opération, nous introduisons la notion de *masque* d'un sommet de la grille.

Soit q un sommet de la grille unitaire et soit $s_1, s_2 \in \{-, 0, +\}$ un couple de signes. Nous notons $\mathcal{Q}^{s_1 s_2}(q)$ l'ensemble de points $p \in \mathbb{R}^2$ tel que s_1 est le signe de $p^1 - q^1$ et s_2 est le signe de $p^2 - q^2$. Les neuf ensembles $\mathcal{Q}^{s_1 s_2}(q)$ forment une partition du plan dont la frontière est représentée par les droites horizontale et verticale passant par q (Fig. 3.4). Pour chacune des paires

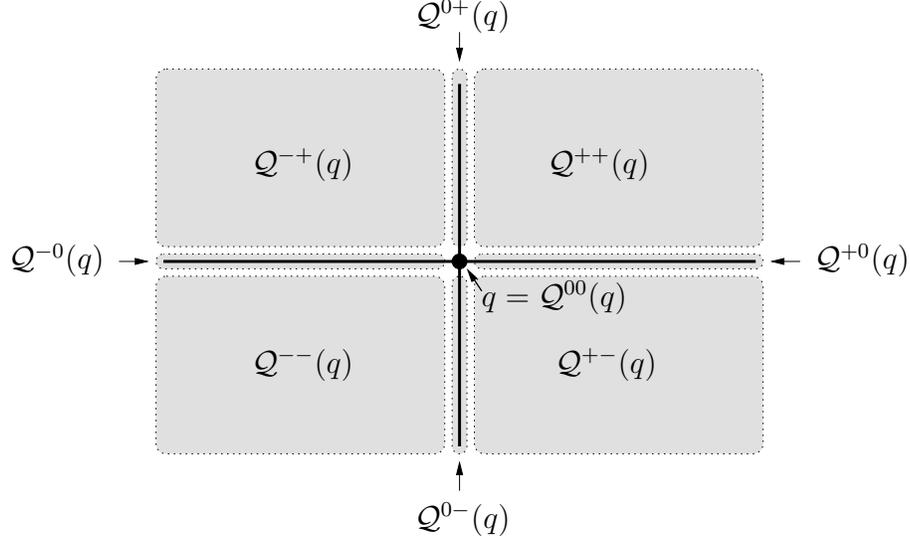


FIG. 3.4 – Division du plan

de signes (s_1, s_2) , nous notons $N^{s_1 s_2}(q)$ le nombre de terminaux appartenant à $\mathcal{Q}^{s_1 s_2}(q)$. Ces neuf valeurs, qui permettent de positionner un sommet par rapport aux terminaux, constituent le *masque* du sommet q .

À présent, nous allons montrer qu'il est possible de déterminer si un sommet q de la grille est dominé en utilisant uniquement son masque. D'après le lemme de la domination discrète, nous savons que q est dominé si et seulement si il est dominé par l'un des quatre sommets p de la grille unitaire tel que $d_1(p, q) = 2$ et $d_\infty(p, q) = 1$. Considérons par exemple le cas où p est situé en haut à droite de q et notons Π la cellule axe-parallèle de diagonale $[p, q]$. La grille étant unitaire, si p domine q , nous savons que $\text{Ort}(\Pi, q)$ est vide et que $\text{Ort}(\Pi, p)$ ne l'est pas (car tous les terminaux plus proches de p que de q sont dans $\text{Ort}(\Pi, p)$). Par conséquent, l'ensemble des deux conditions $N^{++}(p) \neq 0$ et $N^{00}(q) + N^{-0}(p) + N^{--}(p) + N^{0-}(p) = 0$ est nécessaire et suffisant pour que p domine q . En utilisant le même principe, nous pouvons déduire les trois autres ensembles de conditions qui permettent de déterminer si q est un sommet efficace. L'algorithme **MasqueEfficace** (Alg. 3.2) utilise chacun de ces ensembles de conditions pour déterminer si un sommet est efficace à partir de son masque.

Lemme 3.3.1 *Le calcul du masque d'un sommet q de la grille s'effectue en temps $O(n)$. À partir de ce masque, l'efficacité du sommet q peut être calculée en temps constant.*

Preuve. Pour calculer le masque d'un sommet, il suffit de déterminer la position de chaque terminal par rapport au sommet, soit $O(n)$ pour calculer la position de tous les terminaux. Pour déterminer si le masque est celui d'un sommet efficace, il suffit de réaliser quatre tests qui s'effectuent chacun en temps constant. \square

MasqueEfficace(Sommet q , Masque N)

- 1 si $N^{00}(q) + N^{0+}(q) + N^{+0}(q) + N^{++}(q) = 0$ et $N^{--}(q) \neq 0$ alors retourner faux
- 2 si $N^{00}(q) + N^{0+}(q) + N^{-0}(q) + N^{-+}(q) = 0$ et $N^{+-}(q) \neq 0$ alors retourner faux
- 3 si $N^{00}(q) + N^{-0}(q) + N^{--}(q) + N^{0-}(q) = 0$ et $N^{++}(q) \neq 0$ alors retourner faux
- 4 si $N^{00}(q) + N^{0-}(q) + N^{+-}(q) + N^{+0}(q) = 0$ et $N^{-+}(q) \neq 0$ alors retourner faux
- 5 retourner vrai

Alg. 3.2 – MasqueEfficace

Avant de décrire l’algorithme par cerclage, notons qu’il est possible de calculer efficacement le masque des voisins d’un sommet q en utilisant la structure grille et le masque de q . Pour illustrer cette opération de *mise à jour*, considérons par exemple un sommet $q = (4, 4)$ et son voisin $p = (4, 3)$ (Fig. 3.5). En considérant les terminaux du palier entrant T-Pal₂[3], il est facile de calculer $N^{-0}(p)$, $N^{00}(p)$ et $N^{+0}(p)$. Ensuite, pour calculer les six autres valeurs du masque de p , il suffit d’utiliser les équations suivantes qui se déduisent de la définition d’un masque :

- $N^{-+}(p) = N^{-+}(q) + N^{-0}(q)$;
- $N^{0+}(p) = N^{0+}(q) + N^{00}(q)$;
- $N^{++}(p) = N^{++}(q) + N^{+0}(q)$;
- $N^{--}(p) = N^{--}(q) - N^{-0}(p)$;
- $N^{0-}(p) = N^{0-}(q) - N^{00}(p)$;
- $N^{+-}(p) = N^{+-}(q) - N^{+0}(p)$.

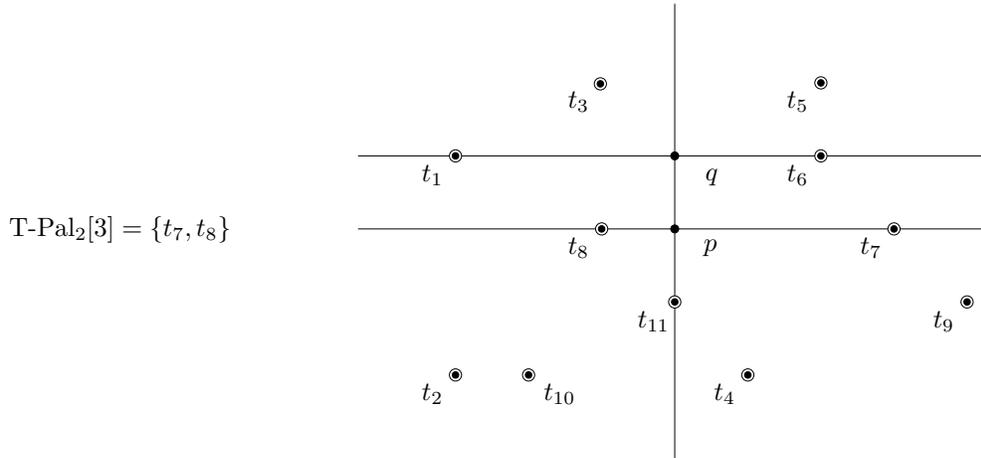


FIG. 3.5 – Illustration de la mise à jour d’un masque

Notons que la mise à jour d’un masque nécessite un nombre d’opérations proportionnel au nombre de terminaux qui appartiennent au palier entrant.

3.4 Un algorithme par cerclage

Nous décrivons dans cette section un algorithme en temps optimal $O(n \log n)$ permettant de construire l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ pour tout ensemble $T \subset \mathbb{R}^2$. Cet algorithme, appelé **CerclageR2L1**, utilise la notion de masque pour déterminer les sommets de la grille appartenant à la frontière de l'enveloppe.

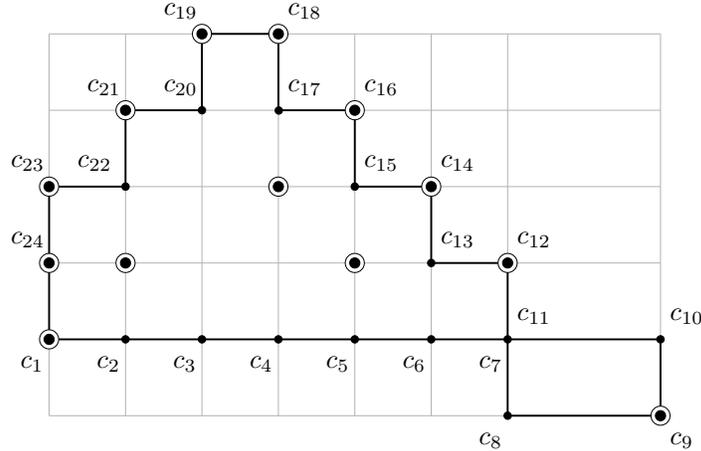


FIG. 3.6 – La chaîne décrivant la frontière de $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ dans le plan

Comme l'enveloppe $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ est un sous-ensemble de cellules de la grille qui est connexe et axe-parallèle convexe, nous savons que sa frontière peut être décrite par une chaîne circulaire d'arêtes de la grille. L'algorithme **CerclageR2L1** va consister à *tourner* autour de l'enveloppe, et à découvrir un à un les différents sommets qui constituent la chaîne. Pour découvrir un nouveau sommet à partir d'un sommet c appartenant à la frontière, l'algorithme calcule le masque des voisins de c dans la grille et détermine lesquels d'entre eux sont efficaces. À partir de cette information, le nouveau sommet à insérer est déterminé. La Figure 3.6 représente un exemple de l'ordre dans lequel l'algorithme découvre les différents sommets de la chaîne.

Voici une description plus détaillée des opérations réalisées (Alg. 3.3). Afin d'initialiser la chaîne avec un sommet de la frontière, l'algorithme cherche parmi les terminaux qui minimisent la coordonnée x celui qui est le plus bas et calcule son masque (ligne 1–2). Ce sommet, noté *centre*, est nécessairement un sommet de la chaîne car c'est un sommet de la frontière de $\Pi(T)$ qui n'est pas dominé. Afin de tourner toujours dans le même sens, les voisins du sommet *centre* dans la grille sont considérés dans un ordre bien précis (ligne 6–11). Lorsqu'un voisin est considéré, son masque est calculé à partir du masque du point *centre*. Si celui-ci est un point efficace, il est inséré dans la chaîne puis prend la place du point *centre*. L'algorithme se termine quand le dernier sommet trouvé est identique au premier sommet de la chaîne.

Lemme 3.4.1 *Pour tout ensemble $T \subset \mathbb{R}^2$, l'algorithme CerclageR2L1 détermine l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ en temps $O(n \log n)$.*

Preuve. Afin de calculer efficacement le masque des voisins d'un sommet, la structure grille est construite au début de l'algorithme, soit $O(n \log n)$. La recherche du premier sommet de la chaîne (ligne 1) s'effectue en temps $O(n)$. Le calcul du masque de celui-ci (ligne 6) s'effectue

.....
CerclageR2L1(T)

```

1  Soit début le terminal le plus bas des terminaux les plus à gauche
2  Calculer le masque du point début
3  Chaîne :=  $\emptyset$ 
4  centre := début
5  Sud := (début1 - 1, début2)
6  faire
7      Empiler(centre, Chaîne)
8      devant := (centre1 + (centre1 - derrière1), centre2 + (centre2 - derrière2))
9      gauche := (centre1 + (centre2 - derrière2), centre2 - (centre1 - derrière1))
10     droite := (centre1 - (centre2 - derrière2), centre2 + (centre1 - derrière1))
11     Calculer les masques des points devant, gauche et droite à partir du masque du point centre
12     si le point droite a un masque efficace alors
13         derrière := centre
14         centre := droite
15     sinon si le point devant a un masque efficace alors
16         derrière := centre
17         centre := devant
18     sinon si le point gauche a un masque efficace alors
19         derrière := centre
20         centre := gauche
21     sinon
22         derrière := devant
23     finsi
24 tant que centre  $\neq$  début

```

.....

Alg. 3.3 – CerclageR2L1(T)

également en temps $O(n)$. Comme la chaîne contient au plus $2n$ sommets et qu'un palier est considéré comme entrant un nombre constant de fois, le nombre d'opérations nécessaires pour la mise à jour des masques est linéaire dans le nombre de terminaux. L'algorithme construit la chaîne décrivant la frontière de l'enveloppe de Pareto car celle-ci est connexe et axe-parallèle convexe. \square

Chapitre 4

Algorithmes de construction dans \mathbb{R}^3 et \mathbb{R}^m pour d_1 et d_∞

Dans ce chapitre, nous décrivons un algorithme par cerclage en temps $O(n^2)$ permettant de construire l'enveloppe $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ dans \mathbb{R}^3 , et un algorithme en temps $O(n \log n)$ utilisant l'égalité $\mathcal{P}_{d_1}(T) = \mathcal{I}(T)$. Nous décrivons également deux algorithmes génériques permettant de construire $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ et $\mathcal{P}_{d_\infty}(T)$ dans \mathbb{R}^m .

4.1 Algorithme par cerclage dans (\mathbb{R}^3, d_1)

Dans cette section, nous décrivons un algorithme en temps $O(n^2)$ permettant de déterminer l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ pour tout $T \subset \mathbb{R}^3$. Cet algorithme, appelé **CerclageR3L1**, consiste à déterminer l'ensemble des sommets de la grille $G(T)$ appartenant à la frontière de $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ et à chaîner ces sommets afin d'obtenir un graphe décrivant la surface de l'enveloppe. Cet algorithme se déroule en quatre phases dont la description détaillée est présentée ci-dessous (Alg. 4.1).

CerclageR3L1

1. Calculer le cerclage pour chaque palier.
 2. Extraire des cerclages les sommets de la grille appartenant à la frontière de $\mathcal{P}_{d_1}(T)$.
 3. Chaîner les sommets appartenant à la frontière afin d'obtenir un graphe de surface.
 4. Extraire les faces de l'enveloppe du graphe de surface.
-

Alg. 4.1 – CerclageR3L1

Phase 1. Elle consiste à trouver tous les sommets de la grille $G(T)$ appartenant à la frontière de l'enveloppe. Pour cela, un traitement est effectué pour chaque palier de la grille. Ce traitement consiste à calculer la frontière de l'intersection du palier avec l'enveloppe $\mathcal{P}_{d_1}(T)$. Comme $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ est un complexe cubique ℓ_1 -isométrique, notons que cette frontière forme une chaîne circulaire composée d'arêtes de la grille $G(T)$. Cette chaîne circulaire est appelée *cerclage de l'enveloppe* appartenant au palier. La Figure 4.1.(a) représente l'enveloppe d'un ensemble de terminaux,

et la Figure 4.1.(b) l'intersection de la frontière de $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ avec l'un des paliers parallèles au plan $H^{\{2,3\}}$. Pour déterminer ce cerclage, l'algorithme effectue les deux étapes suivantes :

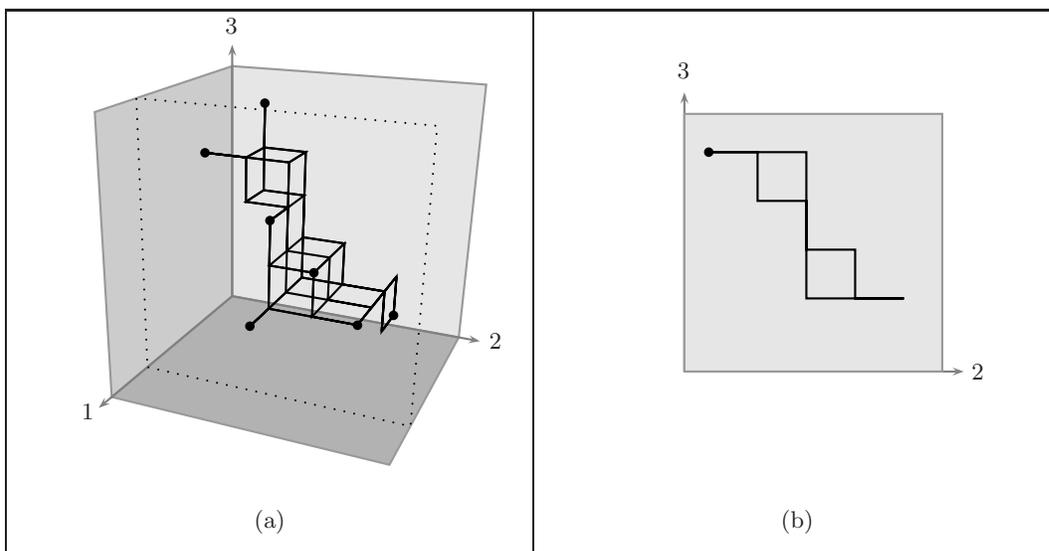
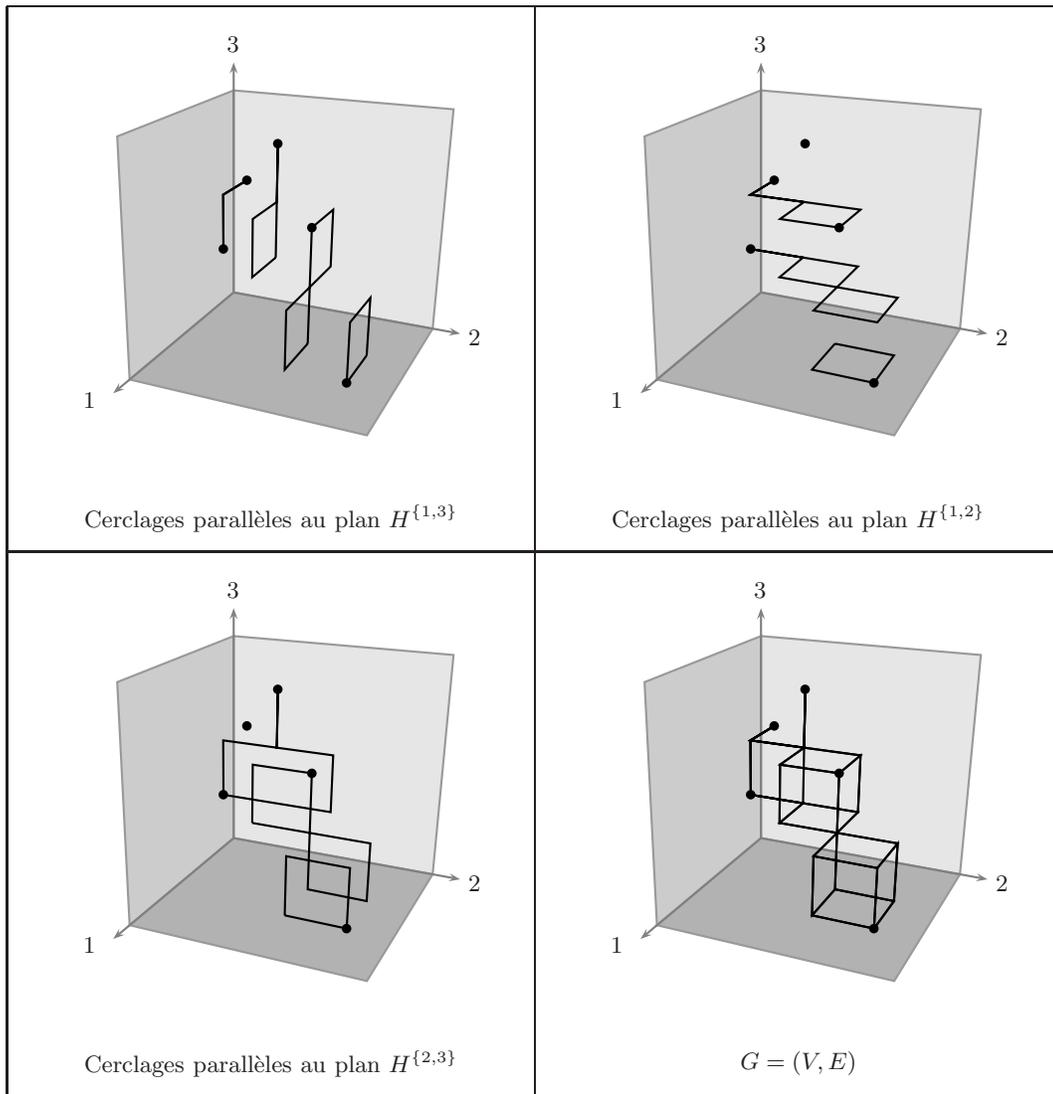


FIG. 4.1 – Intersection de $\mathcal{P}_1(T)$ avec un palier parallèle au plan $H^{\{2,3\}}$

Etape 1. Elle consiste à trouver un sommet de la grille appartenant au palier et à la surface de l'enveloppe. Pour cela, l'algorithme part d'un des terminaux appartenant au palier, puis se déplace dans la grille de voisin en voisin jusqu'à trouver un sommet appartenant à la frontière, *i.e.*, un sommet dont le masque est efficace qui a un voisin dont le masque ne l'est pas. D'après le lemme de domination discrète dans \mathbb{R}^3 , remarquons que la notion de masque se généralise sans difficulté en dimension 3. Notons que cette Etape 1 est nécessaire car les terminaux appartenant au palier n'appartiennent pas obligatoirement à la frontière de l'enveloppe de Pareto. Pour réaliser cette étape efficacement, l'algorithme procède précisément comme suit. Le masque d'un des terminaux appartenant au palier est dans un premier temps calculé. Le calcul de ce masque s'effectue en temps $O(n)$. Afin de limiter le nombre de déplacements de voisin en voisin, ceux-ci sont effectués toujours dans le même sens le long d'une des droites axe-parallèles appartenant au palier. De cette manière, au plus n déplacements sont réalisés. Pour calculer le masque du voisin suivant afin de déterminer son efficacité, le masque du voisin courant est mis à jour. Un palier étant considéré comme entrant au plus une fois pour effectuer toutes les mises à jour, nous déduisons que le calcul de tous les masques s'effectue globalement en temps $O(n)$.

Etape 2. A partir du sommet appartenant au palier et à la frontière de l'enveloppe, l'algorithme se déplace de voisin en voisin dans la grille afin de déterminer le cerclage appartenant au palier. Les opérations effectuées dans cette étape sont identiques à celles effectuées par l'algorithme `CerclageR2L1` car l'intersection de l'enveloppe avec le palier est également ℓ_1 -isométrique. Cette deuxième étape s'effectue donc en temps $O(n)$.

A la fin de la première phase, l'algorithme a calculé au plus $3n$ cerclages car il existe au plus $3n$ paliers. Comme chacun de ces cerclages est composé d'au plus $2n$ sommets, nous disposons d'un ensemble, noté V , composé d'au plus $6n^2$ sommets appartenant à la frontière de l'enveloppe. Nous montrerons, par la suite, qu'un sommet de la grille appartenant à la frontière de $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ appartient nécessairement à V . Sur la Figure 4.2, nous avons représenté les trois types

FIG. 4.2 – Les trois types de cerclages de l’enveloppe $\mathcal{P}_{d_1}(T)$

de cerclages ainsi que leur union.

Phase 2. Elle consiste à chaîner les sommets de l’ensemble V afin d’obtenir un *graphe de surface* que nous noterons $G = (V, E)$. Dans ce graphe, *une arête $e \in E$ connecte deux sommets de V si et seulement si e est une arête de la grille appartenant à la frontière de l’enveloppe de Pareto.* Comme $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ est un complexe cubique conforme, nous utiliserons le fait qu’une arête e de la grille appartient à E si et seulement si les deux extrémités de e appartiennent à V et si e est l’arête d’une cellule de dimension 2 ou 3 n’appartenant pas complètement à $\mathcal{P}_{d_1}(T)$. Pour construire ce graphe, deux étapes sont réalisées. Dans la première, un graphe $G' = (V', E')$ tel que $V' = V$ et $E \subseteq E'$ est construit. Dans ce sur-graphe de G , une arête $e' = uv$ appartient à E' si et seulement si u et v sont des sommets de V qui sont voisins dans la grille. Comme nous pouvons le voir pour l’enveloppe de Pareto de dimension 2 représentée sur la Figure 4.3, les arêtes de G' n’appartiennent pas nécessairement à la frontière de $\mathcal{P}_{d_1}(T)$. La deuxième étape de cette phase consiste simplement à nettoyer le graphe G' pour obtenir le graphe de surface G .

Pour les exemples des figures 4.1 et 4.2 les graphes G et G' sont identiques. Voici les détails de ces deux étapes :

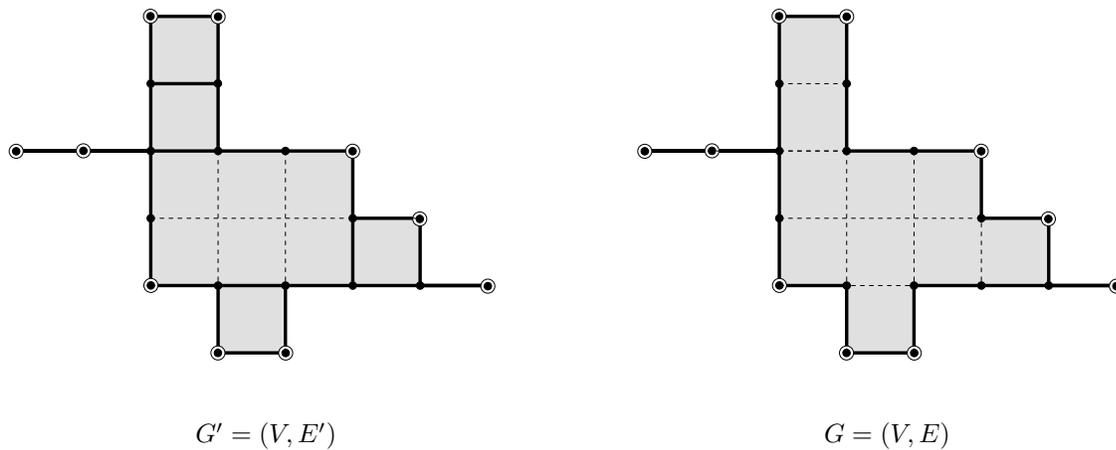


FIG. 4.3 – Les graphes G' et G

Etape 1. Elle consiste à déterminer les arêtes du graphe G' parallèles aux axes x , y et z . Voici comment construire les arêtes parallèles à l'axe x (la construction des autres types d'arêtes est similaire). L'algorithme trie les sommets de V par z croissants en premier critère, par y croissants en deuxième critère, et par x croissants en dernier critère. Dans cet ordre, deux sommets consécutifs s et t tel que $s^z = t^z$, $s^y = t^y$ et $s^x = t^x - 1$ sont nécessairement les extrémités d'une arête de la grille parallèle à l'axe x . A l'inverse, par construction, tous les sommets de V voisins dans la grille sont également consécutifs dans cet ordre. A la fin de cette étape, nous disposons donc de toutes les arêtes du graphe G' . Comme la grille est unitaire et que les sommets ont donc des coordonnées entières comprises entre 1 et n , cette étape peut s'effectuer en temps $O(n)$ en utilisant un tri linéaire [23]. Comme l'enveloppe $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ est axe-parallèle convexe remarquons que G' est constitué de $O(n^2)$ arêtes. Pour réaliser efficacement les traitements qui suivront, nous utilisons un tableau constitué de la liste d'adjacence de chaque sommet de G' .

Etape 2. Elle consiste à nettoyer le graphe G' pour obtenir le graphe de surface G . Pour cela, chaque arête $e' = uv$ du graphe G' est considérée et supprimée le cas échéant. Pour effectuer cette suppression, nous considérons l'ensemble S des sommets de la grille appartenant à des cellules dont e' est une arête. Notons que le nombre de sommets de l'ensemble S est constant. Comme nous l'avons remarqué précédemment, si e' est une arête de la frontière, elle doit être l'arête d'une cellule Π de la grille n'appartenant pas complètement à l'enveloppe de Pareto. Dans ce cas, comme $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ est un complexe cubique conforme, il suffit de trouver un sommet de S n'appartenant pas à V pour conclure que e' est une arête de la frontière. A partir de la liste d'adjacence des sommets u et v , ce test peut être réalisé en temps constant pour chaque arête. Nous déduisons que cette étape s'effectue en temps $O(n^2)$ car le nombre d'arêtes est quadratique.

Phase 3. Elle consiste à extraire les faces de l'enveloppe de Pareto à partir du graphe G . Pour cela, un test est réalisé sur les 12 cellules de dimension 2 adjacentes à chaque sommet $v \in V$ (Fig. 4.4.(a)). En effet, ces cellules sont les seules pouvant représenter une face de la frontière de l'enveloppe dont v est l'un des sommets. Comme $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ est un complexe cubique conforme, pour tester si une cellule est une face, il suffit de tester si tous ses sommets appartiennent à V . En

utilisant la liste d'adjacence du sommet v , cette opération s'effectue en temps constant. Comme le nombre de sommets est quadratique, la complexité en temps de cette troisième phase est $O(n^2)$.

Lemme 4.1.1 *Pour tout ensemble $T \subset \mathbb{R}^3$, si un sommet p de $G(T)$ appartient à la frontière de $\mathcal{P}_{d_1}(T)$, alors p est le sommet d'une cellule de dimension 2 appartenant partiellement à $\mathcal{P}_{d_1}(T)$.*

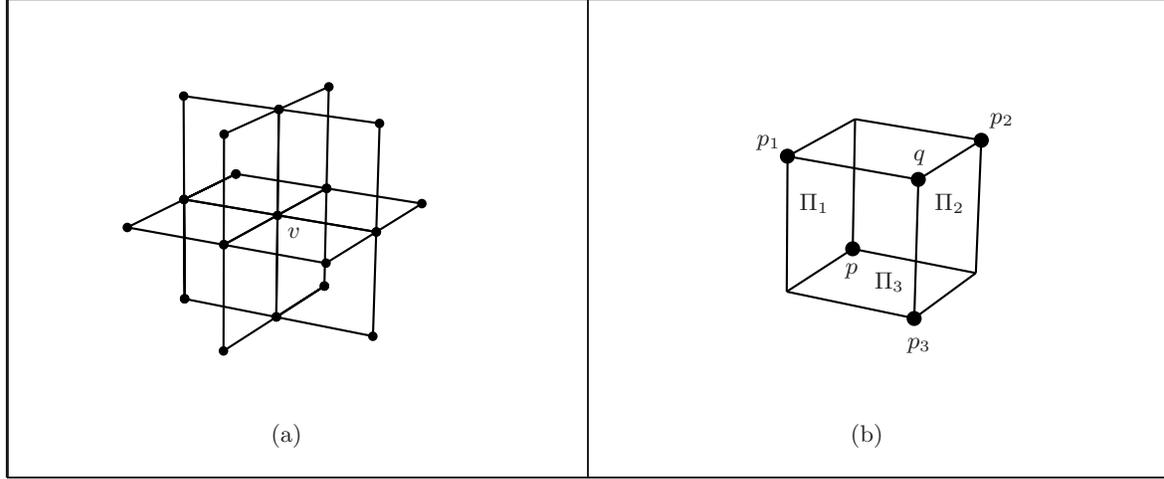


FIG. 4.4 – Correction de l'algorithme CerclageR2L1

Preuve. Par contradiction, supposons que ce ne soit pas le cas. Comme p appartient à la frontière de $\mathcal{P}_{d_1}(T)$, nous savons que p est le sommet d'une cellule Π appartenant partiellement à $\mathcal{P}_{d_1}(T)$. D'après notre hypothèse, cette cellule est nécessairement de dimension 3. Soit Π_1 , Π_2 et Π_3 les trois faces de Π qui s'intersectent en p , *i.e.*, les trois cellules de dimension 2 appartenant à Π et qui s'intersectent en p (Fig. 4.4.(b)). Notons p_i le sommet diagonalement opposé à p dans Π_i pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, et q le sommet de Π qui a pour voisins p_1 , p_2 et p_3 . D'après notre hypothèse, les faces Π_1 , Π_2 et Π_3 appartiennent complètement à $\mathcal{P}_{d_1}(T)$. Par conséquent, q est le seul sommet de Π n'appartenant pas à $\mathcal{P}_{d_1}(T)$. Comme p_1 , p_2 et p_3 appartiennent à $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ et que $\mathcal{P}_{d_1}(T) = \mathcal{I}(T)$, nous savons que $p_1^{I_1} \in \mathcal{P}_{d_1}(T^{I_1})$, $p_2^{I_2} \in \mathcal{P}_{d_1}(T^{I_2})$, et $p_3^{I_3} \in \mathcal{P}_{d_1}(T^{I_3})$. Par conséquent, en s'appuyant sur la même égalité, nous déduisons que $q \in \mathcal{P}_{d_1}(T)$ car $q^{I_1} = p_1^{I_1}$, $q^{I_2} = p_2^{I_2}$ et $q^{I_3} = p_3^{I_3}$. Cela contredit le fait que q soit un sommet de Π n'appartenant pas à $\mathcal{P}_{d_1}(T)$. \square

Théorème 4.1.1 *L'algorithme CerclageR3L1 construit les faces de l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ en temps $O(n^2)$.*

Preuve. La construction des paliers s'effectue en temps $O(n^2)$ car chacun des $3n$ paliers est construit en temps $O(n)$. La construction du graphe G' , son nettoyage, et l'extraction des faces du graphe G s'effectuent également en temps $O(n^2)$. La complexité de l'algorithme est donc $O(n^2)$. Pour montrer que l'algorithme construit les faces de l'enveloppe de Pareto, il faut montrer que tout sommet v de la grille $G(T)$ appartenant à la frontière de $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ appartient également à

V . D'après le Lemme 4.1.1, nous savons que v est le sommet d'une cellule Π de dimension 2 appartenant partiellement à $\mathcal{P}_{d_1}(T)$. Soit H le palier qui contient Π . Comme v appartient à Π , nous savons que v appartient à l'intersection $\mathcal{P}_{d_1}(T) \cap H$. Etant donné que la cellule Π appartient partiellement à $\mathcal{P}_{d_1}(T)$, nous déduisons que v appartient à la frontière de l'intersection $\mathcal{P}_{d_1}(T) \cap H$. Par conséquent, nous concluons que v est un sommet du cerclage de $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ appartenant au palier H , et donc que $v \in V$. \square

4.2 Algorithme par projection dans (\mathbb{R}^3, d_1)

Dans cette section, nous décrivons un algorithme de complexité optimale en temps $O(n \log n)$ permettant de construire l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ pour tout $T \subset \mathbb{R}^3$. Cet algorithme, appelé **ProjectionR3L1**, utilise l'égalité entre $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ et $\mathcal{I}(T)$ établi dans le Théorème 2.2.1. Voici le détail des trois phases qu'il effectue (Alg. 4.2) :

ProjectionR3L1

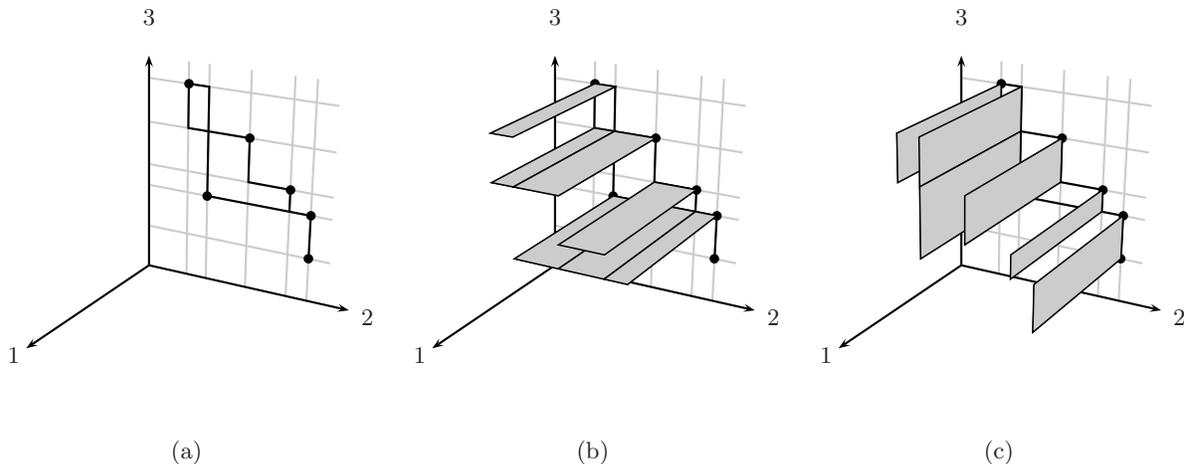
1. Construire les enveloppes de Pareto 2D des ensembles $T^{\{1,2\}}$, $T^{\{1,3\}}$ et $T^{\{2,3\}}$.
 2. Construire les faces des ensembles $\mathcal{I}^1(T)$, $\mathcal{I}^2(T)$ et $\mathcal{I}^3(T)$.
 3. Restreindre à $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ les faces des ensembles $\mathcal{I}^1(T)$, $\mathcal{I}^2(T)$ et $\mathcal{I}^3(T)$.
-

Alg. 4.2 – ProjectionR3L1(T)

Phase 1. Elle consiste à construire les enveloppes de Pareto 2D des ensembles $T^{\{1,2\}}$, $T^{\{1,3\}}$ et $T^{\{2,3\}}$. Rappelons que ces trois ensembles sont les projections de l'ensemble T sur les hyperplans axe-parallèles $H^{\{1,2\}}$, $H^{\{1,3\}}$ et $H^{\{2,3\}}$. Cette construction s'effectue à l'aide de l'algorithme **CerclageR2L1** décrit dans la Section 3.4. Ensuite, pour chacune des trois enveloppes de dimension 2, la représentation par bandes et par paliers est calculée. A la fin de cette phase, nous disposons des arêtes appartenant à la frontière de chacune des enveloppes (Fig. 4.5.(a)), ainsi que des valeurs minimales et maximales de chacune des bandes et de chacun des paliers. Notons que la taille des chaînes circulaires décrivant la frontière de chacune des enveloppes 2D est linéaire en n , et donc que le nombre d'arêtes obtenues à l'issue de cette première phase l'est également.

Phase 2. Les faces des ensembles $\mathcal{I}^1(T)$, $\mathcal{I}^2(T)$ et $\mathcal{I}^3(T)$ sont construites à partir des arêtes obtenues dans la phase précédente. Par exemple, si e est une arête de la frontière de $\mathcal{P}_{d_1}(T^{\{2,3\}})$, alors $e \times H^{\{1\}}$ est une des faces de $\mathcal{I}^1(T)$ (Fig. 4.5.(b) et 4.5.(c)). Notons que les faces construites dans cette phase sont parallèles aux plans $H^{\{1,2\}}$, $H^{\{1,3\}}$ ou $H^{\{2,3\}}$.

Phase 3. Elle consiste à calculer l'intersection de chaque face obtenue dans la deuxième phase avec $\mathcal{I}(T)$. D'après la définition de $\mathcal{I}(T)$, si nous considérons une face f appartenant à l'un des trois ensembles ($\mathcal{I}^1(T)$, $\mathcal{I}^2(T)$ ou $\mathcal{I}^3(T)$), il suffit de calculer l'intersection de f avec les deux autres ensembles pour obtenir l'intersection de f avec $\mathcal{I}(T)$. Par exemple, si f est une face de $\mathcal{I}^1(T)$ parallèle au plan $H^{\{1,3\}}$, l'algorithme va d'abord calculer l'intersection de f avec $\mathcal{I}^3(T)$ et obtenir une face $f' = f \cap \mathcal{I}^3(T)$. Ensuite, il va calculer l'intersection de f' avec $\mathcal{I}^2(T)$ et obtenir une face $f'' = f' \cap \mathcal{I}^2(T) = f \cap \mathcal{I}^3(T) \cap \mathcal{I}^2(T)$. Pour calculer l'intersection de f avec $\mathcal{I}^3(T)$, il

FIG. 4.5 – Les deux premières phases de l'algorithme `ProjectionR3L1`

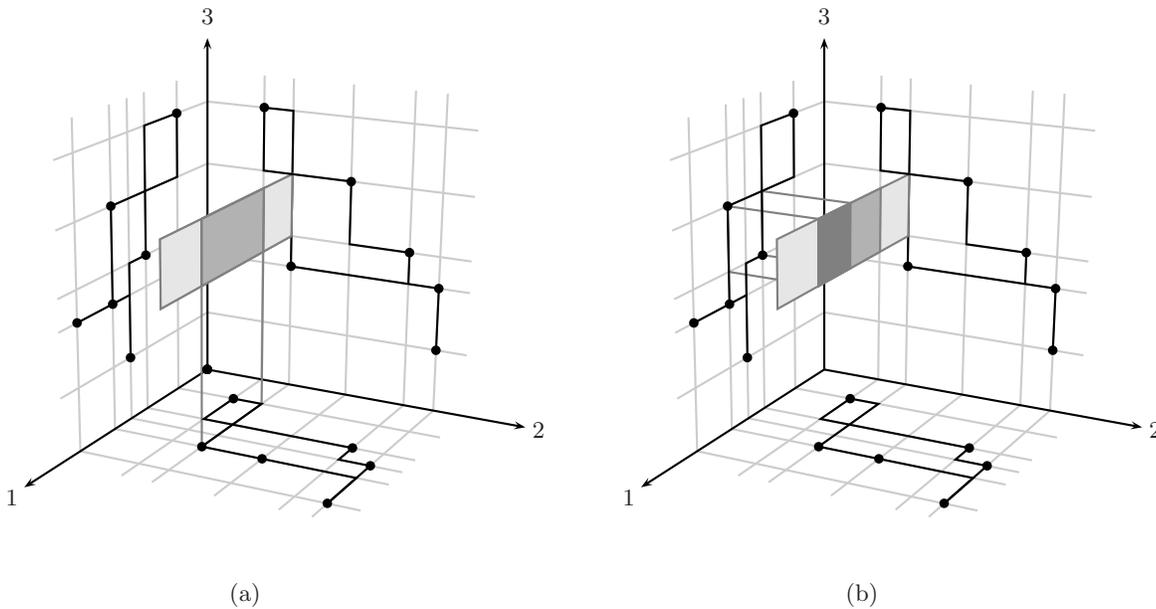
suffit d'utiliser la valeur minimale et la valeur maximale du palier auquel appartient la projection de f sur $H^{\{1,2\}}$ (Fig. 4.6.(a)). Pour calculer l'intersection de f' avec $\mathcal{I}^2(T)$, il suffit d'utiliser la valeur minimale et la valeur maximale de la bande à laquelle appartient la projection de f' sur $H^{\{1,3\}}$ (Fig. 4.6.(b)). Notons que le calcul de la restriction d'une face f à $\mathcal{I}(T)$ s'effectue en temps constant en utilisant la représentation par bandes et par paliers des enveloppes de dimension 2. Par exemple, sur la Figure 4.6, la face f appartient à la quatrième bande horizontale de l'enveloppe $\mathcal{P}_{d_1}(T^{\{2,3\}})$ et, d'après la définition de la grille, elle se projette *exactement* sur la quatrième bande horizontale de l'enveloppe $\mathcal{P}_{d_1}(T^{\{1,3\}})$. Comme la représentation par bande et par palier est stockée dans un tableau, l'accès à la valeur minimale et la valeur maximale de la bande s'effectue en temps constant.

Lemme 4.2.1 *L'ensemble des faces construites par l'algorithme `ProjectionR3L1` décrit complètement la surface de l'ensemble $\mathcal{I}(T)$.*

Preuve. Il suffit de montrer que tout point p appartenant à la frontière de $\mathcal{I}(T)$ appartient à l'une des faces obtenues par l'algorithme. Etant donné que $\mathcal{I}(T)$ est l'intersection des trois polyèdres $\mathcal{I}^1(T)$, $\mathcal{I}^2(T)$ et $\mathcal{I}^3(T)$, nous déduisons que p appartient nécessairement à une face f (construite dans la phase 2) de l'un de ces polyèdres. Comme p appartient à la restriction de f à $\mathcal{I}(T)$, nous déduisons que le lemme est vérifié. \square

Lemme 4.2.2 *L'algorithme `ProjectionR3L1` s'effectue en temps $O(n \log n)$.*

Preuve. Le calcul des enveloppes de Pareto de dimension 2 s'effectue en temps $O(n \log n)$ en exécutant trois fois l'algorithme `CerclageR2L1`. La construction de la représentation par bandes et par paliers de ces enveloppes de dimension 2 s'effectue en temps $O(n \log n)$. La construction des faces de $\mathcal{I}^1(T)$, $\mathcal{I}^2(T)$ et $\mathcal{I}^3(T)$ s'effectue en temps $O(n)$, car le nombre d'arêtes obtenues à l'issue de la première phase est linéaire en n . La restriction de toutes les faces à $\mathcal{I}(T)$ s'effectue en temps $O(n)$, car la restriction d'une face s'effectue en temps constant. La complexité en temps de l'algorithme `ProjectionR3L1` est donc $O(n \log n)$. \square


 FIG. 4.6 – Restriction d'une face à $\mathcal{I}(T)$

Théorème 4.2.1 *L'algorithme `ProjectionR3L1` construit les faces de l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ en temps optimal $O(n \log n)$.*

Preuve. D'après le Lemme 4.2.2, la complexité de l'algorithme est $O(n \log n)$. Comme les ensembles $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ et $\mathcal{I}(T)$ coïncident, nous déduisons, d'après le Lemme 4.2.1, que l'algorithme construit les faces qui décrivent complètement la surface de l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_{d_1}(T)$. \square

Remarque 4.2.1 L'algorithme `ProjectionR3L1` construit l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ en temps $O(n)$ si nous ne considérons pas les tris qui permettent de calculer la structure grille et le passage en coordonnées unitaires. Par construction, nous déduisons également que la surface de l'enveloppe peut être décrite par $O(n)$ faces.

4.3 Un algorithme dans \mathbb{R}^m pour les normes polyédrales

En 1988, Pelegrin et Fernandez [58] décrivent un algorithme permettant de construire l'enveloppe de Pareto dans le plan muni d'une norme polyédrale. Cet algorithme a une complexité qui dépend du nombre de sommets de la boule unitaire de la distance considérée. Cependant, dans leur article, ils ne précisent pas cette complexité. En 1990, Durier [28] mentionne deux règles de détection simples permettant de déterminer si un point appartient à l'enveloppe de Pareto. Cependant, aucune description algorithmique n'est donnée. Dans cette section, nous précisons les aspects algorithmiques des notions abordées par ces différents auteurs. Cela permet d'obtenir un algorithme générique permettant de construire les enveloppes de Pareto dans \mathbb{R}^m pour toute distance induite par une norme polyédrale.

4.3.1 Efficacité d'un point

Soit d une distance induite par une norme polyédrale de \mathbb{R}^m . Soit $\text{HB}(d, m)$ le nombre de paires d'hyperplans parallèles délimitant la frontière d'une boule de l'espace (\mathbb{R}^m, d) . Nous dirons que deux hyperplans sont du même *type* si ils sont parallèles et nous numérotions de 1 à $\text{HB}(d, m)$ ces différents types. Pour la distance d_∞ , $\text{HB}(d_\infty, m) = m$ car les boules sont des hypercubes axe-parallèles de dimension m . Pour la distance d_1 , $\text{HB}(d_1, m) = 2^{m-1}$ car un type d'hyperplan est défini à partir de chacun des orthants obtenus en traçant les hyperplans axe-parallèles passant par le centre de la boule (deux orthants opposés définissent une paire d'hyperplans parallèles du même type).

Soit H un hyperplan de \mathbb{R}^m . Nous notons H^+ et H^- les deux demi-espaces ouverts délimités par H tel que le demi-espace H^+ soit obtenu par translation de H^+ pour tout hyperplan H' parallèle à H (cette condition permet de définir une orientation). Nous notons également $\overline{H^+} = H^+ \cup H$ et $\overline{H^-} = H^- \cup H$. D'après la définition des boules de l'espace (\mathbb{R}^m, d) , nous pouvons déduire la propriété suivante :

Lemme 4.3.1 *L'intersection \mathcal{C} d'une famille de boules de (\mathbb{R}^m, d) est un convexe délimité par une paire d'hyperplans parallèles de chaque type que nous noterons $\{P_i, M_i\}$ de telle sorte que*

$$\mathcal{C} = \bigcap_{i=1}^{\text{HB}(d, m)} (\overline{P_i^+} \cap \overline{M_i^-}).$$

De cette propriété découle la procédure suivante permettant de calculer l'intersection \mathcal{C} d'une famille de n boules de (\mathbb{R}^m, d) .

Procédure `CalculerIntersection` $(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n)$. Voici comment calculer l'hyperplan P_i pour tout $i \in \{1, \dots, \text{HB}(d, m)\}$ (le calcul de l'hyperplan M_i est similaire). Soit $P_{i,1}, \dots, P_{i,n}$ les hyperplans du $i^{\text{ème}}$ type tel que $P_{i,j}$ délimite la frontière de la boule \mathcal{B}_j et tel que $\mathcal{B}_j \subset \overline{P_{i,j}^+}$. Affecter à P_i l'hyperplan $P_{i,k}$ tel que $\overline{P_{i,k}^+} \subseteq \overline{P_{i,j}^+}$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$.

Lemme 4.3.2 *La procédure `CalculerIntersection` s'effectue en temps $O(\text{HB}(d, m)nm)$.*

Preuve. La recherche de l'hyperplan $P_{i,k}$ dans la liste $P_{i,1}, \dots, P_{i,n}$ s'apparente à la recherche d'un élément minimal. Comme la comparaison de deux hyperplans s'effectue en $O(m)$ en utilisant leurs équations cartésiennes, nous déduisons que la recherche de $P_{i,k}$ (ou de $M_{i,k}$) s'effectue en $O(nm)$. Cette recherche étant réalisée pour $\text{HB}(d, m)$ types d'hyperplans, nous concluons que la procédure s'effectue en $O(\text{HB}(d, m)nm)$. \square

Afin de décrire la procédure permettant de déterminer si un point p est efficace, nous allons utiliser la propriété suivante.

Lemme 4.3.3 *Soit $p \in \mathbb{R}^m$ et soit B l'intersection des boules $\mathcal{B}_d(t_1, d(t_1, p)), \dots, \mathcal{B}_d(t_n, d(t_n, p))$. Le point p est efficace si et seulement si B appartient à un hyperplan délimitant la surface de $\mathcal{B}_d(t_i, d(t_i, p))$ pour tout indice $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Preuve. Par définition, remarquons que $B \subseteq \mathcal{B}_d(t_i, d(t_i, p))$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Si le point p est dominé, il existe un point q et un terminal t_j tel que $d(q, t_j) < d(p, t_j)$ et $d(q, t) \leq d(p, t)$ pour tout terminal t . Par conséquent, il existe une valeur $\varepsilon > 0$ tel que $B' = B \cap$

$\mathcal{B}_d(t_j, d(t_j, p) - \varepsilon) \neq \emptyset$ ($q \in B'$). Comme B' n'intersecte pas les hyperplans délimitant la surface de $\mathcal{B}_d(t_j, d(t_j, p))$, nous déduisons que B n'appartient complètement à un des ces hyperplans. Pour montrer l'implication inverse, il suffit de remarquer qu'il est impossible de diminuer le rayon d'une des boules de telle sorte que B' soit non-vide, si B appartient à la surface des n boules. \square

Procédure PointEfficace(p). Soit $B := \cap_{i=1}^n \mathcal{B}_d(t_i, d(t_i, p))$. Si B appartient à un hyperplan délimitant la surface de $\mathcal{B}_d(t_i, d(t_i, p))$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, alors p est efficace. Dans le cas contraire, p est dominé.

Lemme 4.3.4 *La procédure PointEfficace s'effectue en temps $O(\text{HB}(d, m)nm)$.*

Preuve. D'après le Lemme 4.3.2, le calcul de B s'effectue en $O(\text{HB}(d, m)nm)$. Soit $\{P_j, M_j\}$ la paire d'hyperplans de type j délimitant la surface de B , et soit $\{P'_j, M'_j\}$ celle délimitant la surface de $\mathcal{B}_d(t_i, d(t_i, p))$. Par définition, pour tester que B appartient à un hyperplan délimitant la surface de la boule $\mathcal{B}_d(t_i, d(t_i, p))$, il suffit de trouver un type d'hyperplan k tel que $P'_k = P_k = M_k$ ou tel que $M'_k = P_k = M_k$. Comme cette recherche peut s'effectuer en $O(\text{HB}(d, m)m)$, nous déduisons que les tests réalisés pour les n boules peuvent également s'effectuer en $O(\text{HB}(d, m)nm)$. \square

4.3.2 L'algorithme GénériquePolyédrale

Soit d une distance issue d'une norme polyédrale. Soit $\text{HC}(d, m)$ le nombre d'hyperplans définissant les faces des cônes centrés en un point de \mathbb{R}^m pour la distance d . Rappelons qu'un cône est défini à partir du centre d'une boule et de chacune des faces de la boule. Pour la distance d_1 , $\text{HC}(d_1, m) = m$ car les cônes centrés en un point sont définis par les m hyperplans axe-parallèles passant par le point. Pour la distance d_∞ , $\text{HC}(d_\infty, m) = m(m - 1)$ car les cônes centrés en un point sont définis à partir des faces de dimension $m - 1$ du cube unité, et que les faces de ces cônes sont donc définies à partir des faces de dimension $m - 2$ du cube unité. Chacun de ces $\text{HC}(d, m)$ hyperplans définit un *type d'hyperplan*. Soit $G_d(T)$ la grille définie par les cônes centrés au niveau de chaque terminal. Cette grille est définie par $n \text{HC}(d, m)$ hyperplans (n hyperplans parallèles de chaque type). De la même manière que nous l'avons fait pour la distance d_1 , nous appelons *palier* ces différents hyperplans. Si nous considérons les n paliers parallèles passant par chacun des terminaux, nous pouvons également trier ces paliers par rapport à l'une des droites orthogonales à chacun d'eux et ainsi définir la notion de paliers consécutifs. Une cellule de la grille $G_d(T)$ est délimitée par une paires de paliers (hyperplans) de chaque type. Les deux paliers de chaque paire sont soit consécutifs, soit confondus. Ainsi, si, pour chaque paire, les paliers délimitant la frontière d'une cellule ne sont pas confondus, alors il s'agit d'une cellule de dimension $m - 1$. Nous déduisons que la grille $G_d(T)$ est constituée de $O(n^{\text{HC}(d, m)})$ cellules. Rappelons que ces cellules jouent le rôle des convexes élémentaires introduits par Durier et Michelot [28, 29].

A chaque cellule de la grille $G_d(T)$, nous associons un point appartenant à l'intérieur strict relatif de la cellule (le barycentre des sommets de la cellule, par exemple). Nous notons V_d l'ensemble des sommets associés à chaque cellule. Comme l'enveloppe $\mathcal{P}_d(T)$ est une union de cellules de $G_d(T)$ [28, 29], nous déduisons qu'une cellule de la grille appartient à l'enveloppe si et seulement si le point qui lui est associé appartient à $\mathcal{P}_d(T)$.

L'algorithme générique **GénériquePolyédrale** consiste à déterminer les sommets de V_d appartenant à l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_d(T)$, et ainsi à lister les cellules appartenant à l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_d(T)$. Pour déterminer si un point est efficace la procédure **PointEfficace** est utilisée.

Théorème 4.3.1 *Pour tout $T \subset \mathbb{R}^m$ et toute distance induite d'une norme polyédrale, l'algorithme `GénériquePolyédrale` construit l'enveloppe $\mathcal{P}_d(T)$ en temps $O(n^{\text{HC}(d,m)+1}\text{HB}(d,m)m)$.*

Remarque 4.3.1 Pour l'enveloppe $\mathcal{P}_{d_\infty}(T)$, l'algorithme `GénériquePolyédrale` a pour complexité $O(n^{m(m-1)+1}m^2)$ dans \mathbb{R}^m et $O(n^7)$ dans \mathbb{R}^3 . Pour l'enveloppe $\mathcal{P}_{d_1}(T)$, il a pour complexité $O(n^{m+1}2^{m-1}m)$ dans \mathbb{R}^m et $O(n^4)$ dans \mathbb{R}^3 .

4.4 Implémentation

Nous avons implémenté les algorithmes `BalayageR2L1`, `CerclageR2L1`, `CerclageR3L1`, une version de l'algorithme `GénériquePolyédrale` permettant de construire $\mathcal{P}_{d_\infty}(T)$ dans \mathbb{R}^3 , et l'algorithme `ProjectionR3L1`. Nous avons utilisé le langage C, la bibliothèque graphique 3D `OPENGL` [77] et le `TOOLKIT HELIUM` [65] pour gérer les différentes interfaces graphiques. Ces interfaces permettent, entre autres, de visualiser les enveloppes, de les voir selon différents points de vue, de placer des terminaux manuellement ou de les tirer de manière aléatoire. Les différentes interfaces représentent environ 8000 lignes de codes. Sur les figures 4.7 et 4.8, nous avons représenté quelques exemples d'enveloppes obtenues par ces différentes interfaces.

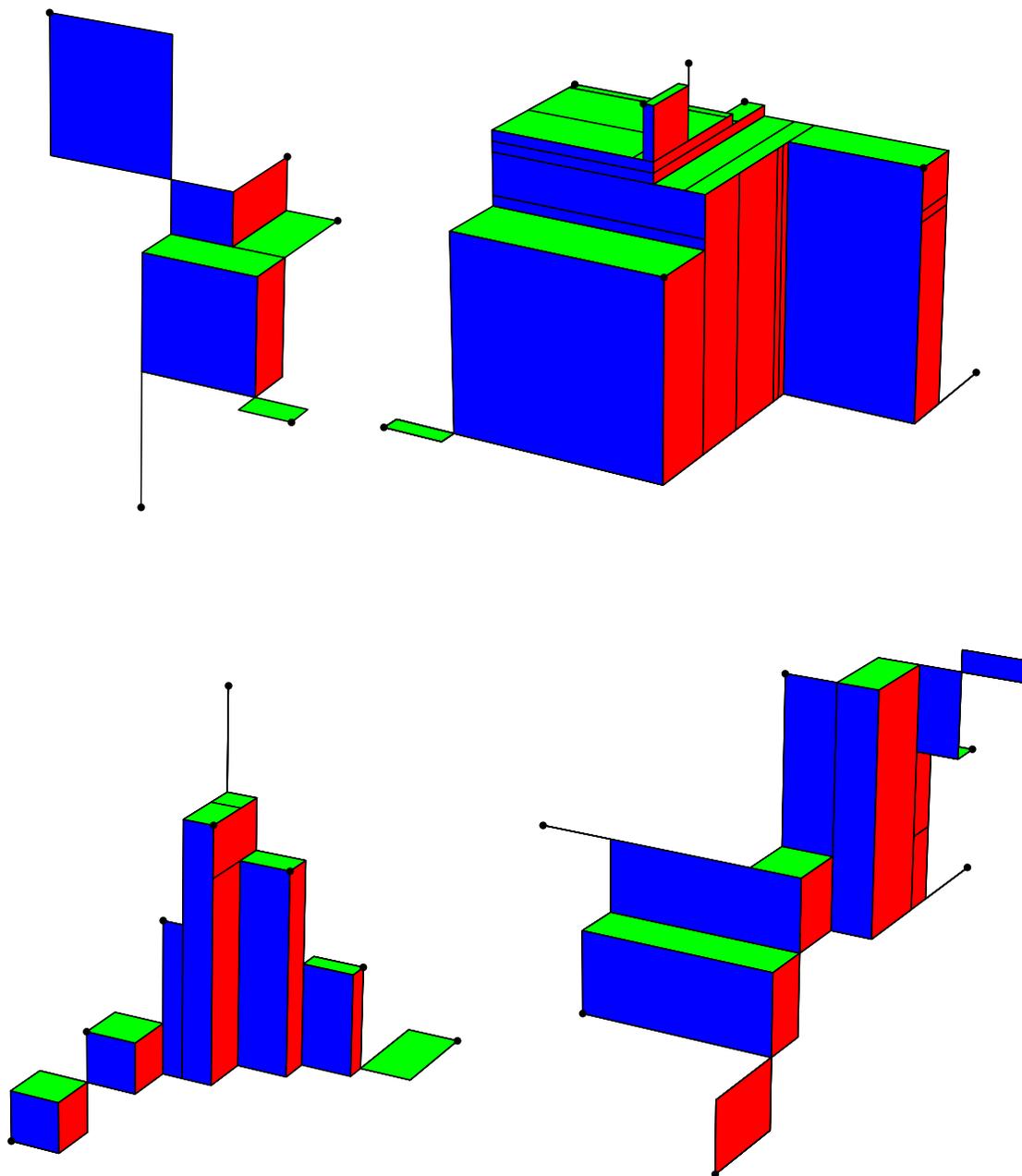
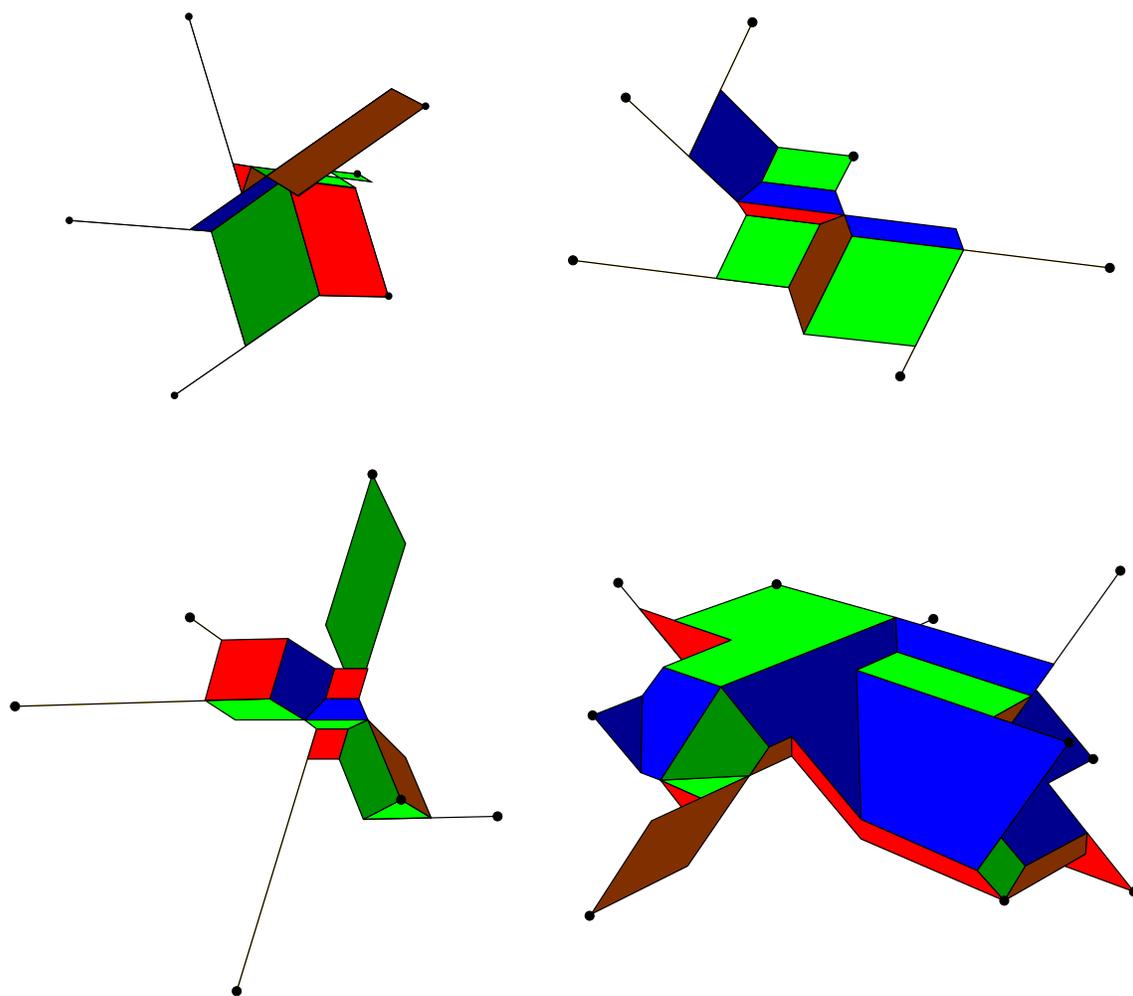


FIG. 4.7 – Exemples d’envelopes de Pareto dans (\mathbb{R}^3, d_1)

FIG. 4.8 – Exemples d’enveloppes de Pareto dans (\mathbb{R}^3, d_∞)

Deuxième partie

Réseaux de Manhattan

Chapitre 5

Préliminaires

Un *chemin rectilinéaire* P entre deux points p, q du plan \mathbb{R}^2 est un chemin composé uniquement de segments horizontaux et verticaux. Plus généralement, un *réseau rectilinéaire* $N = (V, E)$ est composé d'un ensemble fini V de points du plan \mathbb{R}^2 (les sommets de N), et d'un ensemble fini E de segments horizontaux et verticaux qui connectent des paires de points de V (les arêtes de N). La *taille* d'un chemin rectilinéaire P (ou d'un réseau rectilinéaire N) est égale à la somme des longueurs des arêtes qui le constituent. Un ℓ_1 -*chemin* (ou *chemin de Manhattan*) entre deux points p et q est un chemin rectilinéaire qui connecte p et q , et dont la taille est égale à la distance d_1 entre les deux points (il s'agit d'un chemin monotone). La Figure 5.1 représente un chemin rectilinéaire et un chemin de Manhattan entre deux points.

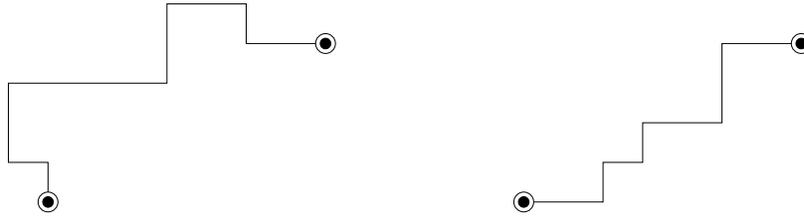


FIG. 5.1 – Un chemin rectilinéaire et un chemin de Manhattan

Soit $T = \{t_1, \dots, t_n\}$ un ensemble de n points (*terminaux*) du plan. Un *réseau de Manhattan* associé à T est un réseau rectilinéaire $N = (V, E)$ dans lequel il existe un ℓ_1 -chemin entre chaque paire de terminaux $t, t' \in T$. Un *réseau de Manhattan minimal* associé à T est un réseau de Manhattan de taille minimale, et le problème du réseau de Manhattan minimal consiste à trouver celui-ci.

Nous noterons N_{opt} un réseau de Manhattan minimal associé à l'ensemble T . Le plus petit rectangle axe-parallèle qui contient les points p et q est noté $R(p, q)$ (ce rectangle est dit *dégénéré* si les points p et q sont alignés horizontalement ou verticalement). Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, le rectangle $R(p, q)$, qui est égal à $I_{d_1}(p, q)$, désigne l'ensemble des points du plan par lesquels peut passer un chemin de Manhattan connectant les points p et q . Afin de simplifier l'écriture, pour deux terminaux $t_i, t_j \in T$, nous noterons $R_{ij} := R(t_i, t_j)$. Nous dirons qu'un réseau N satisfait une paire de terminaux (t_i, t_j) s'il existe un chemin de Manhattan entre t_i et t_j dans N . Plus généralement, nous dirons qu'un réseau N satisfait un ensemble de paires de terminaux F , si N satisfait toutes les paires de F .

Chapitre 6

Division en sous-problèmes

Ce chapitre établit les propriétés qui lient les réseaux de Manhattan aux enveloppes de Pareto. Comme cela peut être fait pour plusieurs problèmes d'optimisation, nous montrons dans un premier temps qu'il existe un réseau de Manhattan minimal inclus dans l'enveloppe $\mathcal{P}_{d_1}(T)$. Ensuite, nous décrivons un algorithme, appelé **Division-Fusion**, qui permet de ramener la résolution du problème du réseau de Manhattan minimal à la résolution de plusieurs sous-problèmes ayant des particularités géométriques qui seront exploitées par nos différents algorithmes.

6.1 Réseaux de Manhattan et grille de Pareto

Comme pour de nombreux problèmes de type Steiner rectilinéaire [79], Gudmundsson *et al.* [37] ont montré que pour le problème du réseau de Manhattan minimal, il existe toujours une solution optimale composée uniquement d'arêtes de la grille de Hanan (la grille rectilinéaire). Cette propriété permet de passer d'un espace de recherche continu à un espace de recherche discret. Cela se révèle très utile, par exemple, pour décrire le problème du réseau de Manhattan minimal sous la forme d'un programme linéaire en nombres entiers.

Lemme 6.1.1 [37, 79] *Il existe un réseau de Manhattan minimal composé uniquement d'arêtes appartenant à la grille de Hanan de l'ensemble T .*

La *grille de Pareto* de l'ensemble T est constituée des arêtes de la grille de Hanan qui appartiennent à l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ (Fig. 6.1). L'une des raisons qui nous ont amené

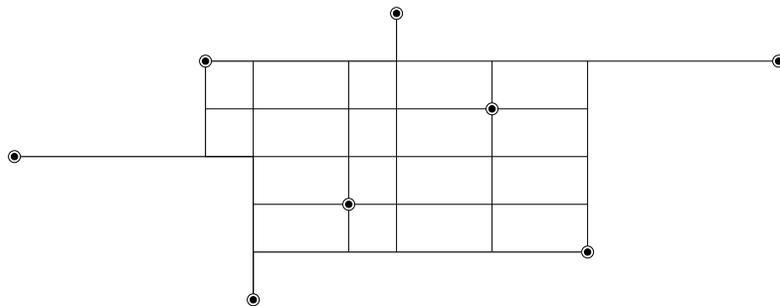


FIG. 6.1 – Grille de Pareto d'un ensemble de terminaux

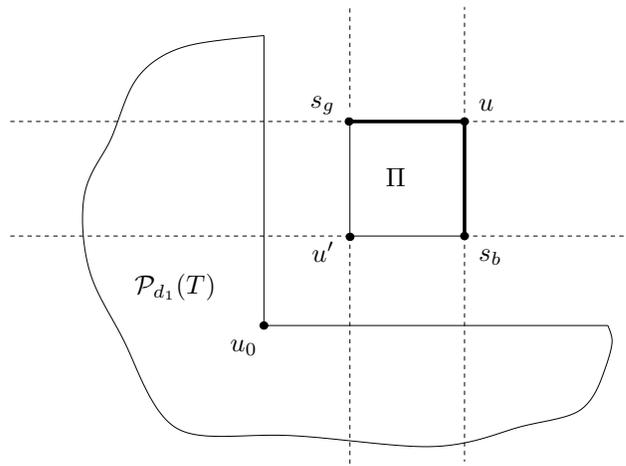


FIG. 6.2 – Illustration du Lemme 6.1.2

à étudier les réseaux de Manhattan réside dans le fait que ces derniers possèdent la propriété suivante.

Lemme 6.1.2 *Il existe un réseau de Manhattan minimal composé uniquement d'arêtes appartenant à la grille de Pareto de l'ensemble T .*

Preuve. D'après le Lemme 6.1.1, il existe un réseau de Manhattan N composé uniquement d'arêtes de la grille de Hanan engendrée par T . Notons $\mathcal{R}(N)$ l'union des cellules de la grille de Hanan appartenant à l'intérieur du réseau N . Supposons que N est un réseau de Manhattan minimal qui minimise le nombre de cellule de $\mathcal{R}(N)$ appartenant à l'extérieur de $\mathcal{P}_{d_1}(T)$. Si certains sommets de N n'appartiennent pas à la grille de Pareto, il existe nécessairement des cellules de $\mathcal{R}(N)$ appartenant également à l'extérieur de l'enveloppe de Pareto. Soit u_0 un sommet de N n'appartenant pas à la grille de Pareto. D'après le lemme de l'orthant dominé, comme u_0 n'appartient pas à $\mathcal{P}_{d_1}(T)$, nous savons qu'il existe un quadrant \mathcal{Q} défini à partir de u_0 tel que $\mathcal{Q} \cap \mathcal{P}_{d_1}(T) = \emptyset$. Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1(u_0)$ (Fig. 6.2). Soit u le sommet N qui appartient à $\mathcal{Q}_1(u_0)$ et qui est situé le plus haut. Si plusieurs sommets sont candidats, u désigne le sommet le plus à droite. D'après le choix de u , aucun sommet de N n'appartient à $\mathcal{Q}_1(u)$ mis à part u , *i.e.*, $\mathcal{Q}_1(u) \cap N = \{u\}$. Par conséquent, u a exactement deux voisins dans N et ces deux voisins appartiennent à $\mathcal{Q}_3(u)$. Un voisin noté s_g situé à sa gauche et un voisin s_b situé en dessous de lui. Soit Π la cellule de la grille de Hanan de sommets u , u' , s_g et s_b tel que u et u' soient deux sommets diagonalement opposés de la cellule Π . Comme l'enveloppe $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ est un complexe cubique conforme et que u n'appartient pas à cette enveloppe, notons que Π est une cellule de $\mathcal{R}(N)$ n'appartenant pas à la grille de Pareto. Comme u a uniquement s_g et s_b comme voisins dans N , nous déduisons que les arêtes (u, s_g) et (u, s_b) sont uniquement utilisées pour connecter des paires de terminaux $\{t_i, t_j\}$ tel que t_i appartient à $\text{Ort}(\Pi, s_g)$ et t_j appartient à $\text{Ort}(\Pi, s_b)$. Par conséquent, le réseau N' obtenu en remplaçant les arêtes (u, s_g) et (u, s_b) par les arêtes (u', s_g) et (u', s_b) est également un réseau de Manhattan minimal. Comme $\mathcal{R}(N') = \mathcal{R}(N) \setminus \Pi$ et que Π n'appartient pas à la grille de Pareto, nous obtenons une contradiction avec le fait que N est un réseau de Manhattan minimal qui minimise le nombre de cellules de $\mathcal{R}(N)$ n'appartenant pas à la grille de Pareto. \square

L'ensemble des arêtes E et des sommets V de la grille de Pareto forme un graphe noté $\Gamma = (V, E)$. Deux arêtes e, f de ce graphe sont dites jumelles si elles sont opposées dans une face rectangulaire de la grille. Deux arêtes e, f sont dites parallèles s'il existe une suite d'arêtes $e = e_1, e_2, \dots, e_{m+1} = f$ tel que e_i et e_{i+1} soient jumelles pour tout $i = 1, \dots, m$. Par la suite, nous utiliserons le fait que deux arêtes parallèles ont la même longueur.

6.2 Division en sous-problèmes

Un sommet de la grille de Pareto est appelé *sommet d'articulation* si sa suppression déconnecte la grille de Pareto en plusieurs composantes connexes que nous appellerons *blocs*. L'algorithme **Division-Fusion** que nous allons décrire utilise l'ensemble des sommets d'articulation, noté A , pour diviser le problème de recherche du réseau de Manhattan minimal en sous-problèmes de plus petite taille. Cet algorithme se déroule en trois étapes. La première étape consiste à diviser la grille de Pareto au niveau de chaque sommet d'articulation en dupliquant ceux-ci dans chacun des blocs obtenus (Fig. 6.3.1). La seconde étape consiste, pour chaque bloc, à ajouter un terminal sur chacun des sommets issu d'une articulation et à construire le réseau de Manhattan minimal des terminaux appartenant au bloc (Fig. 6.3.2). Dans la dernière étape, les réseaux construits précédemment sont fusionnés pour obtenir un réseau de Manhattan minimal pour l'ensemble des terminaux (Fig. 6.3.3).

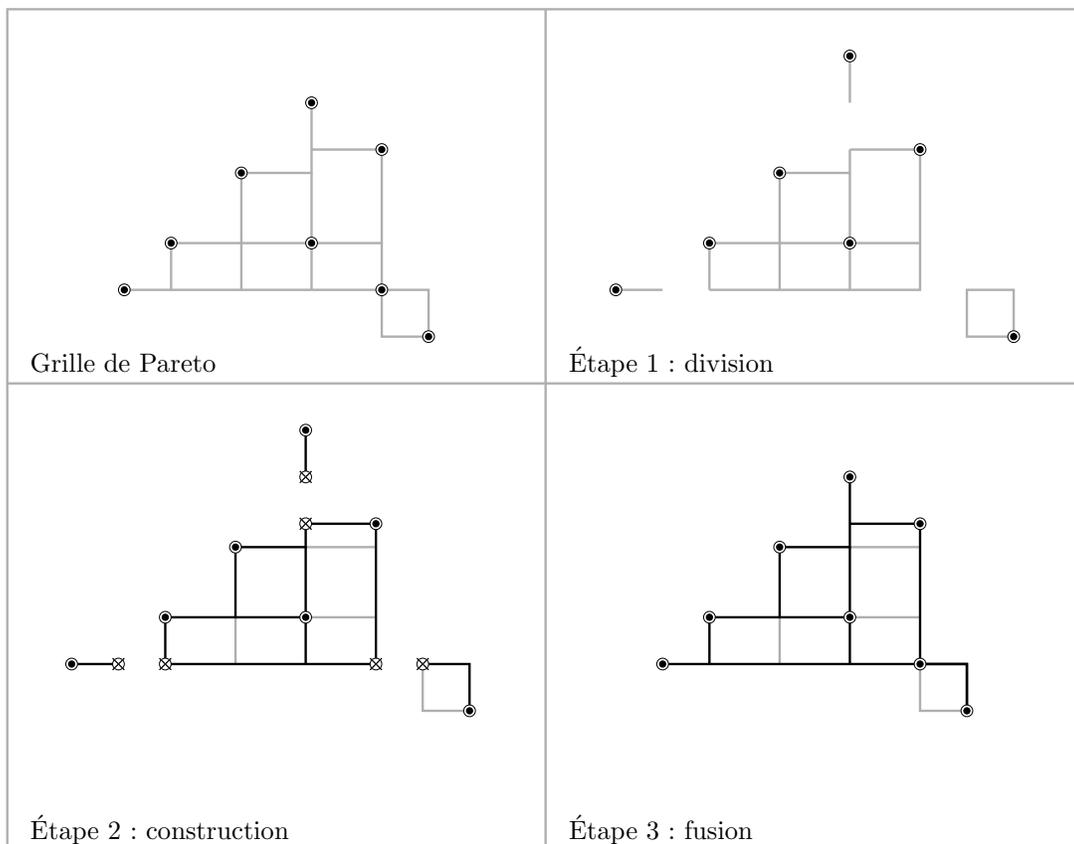


FIG. 6.3 – Déroulement de l'algorithme **Division-Fusion**

Afin de montrer que le réseau obtenu à la fin de l'algorithme **Division-Fusion** est un réseau de Manhattan minimal pour l'ensemble T , nous utiliserons les lemmes qui suivent.

Lemme 6.2.1 *Si l'on divise l'enveloppe de Pareto au niveau d'un point d'articulation a , alors au moins un terminal appartient à chacun des blocs créés par cette division.*

Preuve. Supposons par contradiction qu'un point b appartienne à un bloc de l'enveloppe ne contenant aucun terminal et notons t un des terminaux. Nous savons qu'il existe un chemin de Manhattan entre b et t qui passe par a car l'enveloppe de Pareto est ℓ_1 -isométrique. Nous déduisons que $d_1(a, t) < d_1(b, t)$ et donc que a domine b car c'est le cas pour tous les terminaux. Cela contredit l'hypothèse que b appartient à l'enveloppe de Pareto. \square

Lemme 6.2.2 *Un réseau de Manhattan inclus dans l'enveloppe de Pareto est également un réseau de Manhattan pour l'ensemble $T \cup A$.*

Preuve. Soit N un réseau de Manhattan composé uniquement d'arêtes de la grille de Pareto et s un sommet d'articulation. En utilisant un raisonnement par induction, il suffit de montrer que N est un réseau de Manhattan pour l'ensemble $T \cup \{s\}$. Considérons donc un terminal $t \in T$ et montrons que N satisfait la paire (s, t) . La suppression de s divise la grille en plusieurs blocs. Soit t' un terminal appartenant à un bloc différent de celui de t (ce terminal existe d'après le Lemme 6.2.1). D'après la définition d'un sommet d'articulation et comme l'enveloppe de Pareto est ℓ_1 -isométrique, il existe nécessairement un ℓ_1 -chemin passant par s qui connecte t et t' dans N . La partie de ce chemin allant de t à s est un ℓ_1 -chemin qui connecte la paire (t, s) . Il existe donc un ℓ_1 -chemin entre s et chacun des terminaux de l'ensemble T . \square

Lemme 6.2.3 *Le réseau construit par l'algorithme **Division-Fusion** est un réseau de Manhattan pour l'ensemble $T \cup A$.*

Preuve. Soit N le réseau construit par l'algorithme **Division-Fusion**. Soit \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 deux blocs ayant en commun un sommet d'articulation s . En utilisant un raisonnement par induction, il suffit de montrer que la partie de N appartenant aux deux blocs constitue un réseau de Manhattan pour l'ensemble $(T \cup A) \cap (\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2)$. Par construction, la partie du réseau N appartenant au bloc \mathcal{B}_1 est un réseau de Manhattan pour l'ensemble $(T \cup A) \cap \mathcal{B}_1$. De même, la partie de N appartenant au bloc \mathcal{B}_2 est un réseau de Manhattan pour l'ensemble $(T \cup A) \cap \mathcal{B}_2$. Si nous considérons deux points $r_1, r_2 \in (T \cup A)$ tel que $r_1 \in \mathcal{B}_1$ et $r_2 \in \mathcal{B}_2$, nous déduisons facilement que N satisfait la paire (r_1, r_2) car, par construction, N satisfait les paires (r_1, s) et (s, r_2) . En effet, en prolongeant le ℓ_1 -chemin entre r_1 et s par le ℓ_1 -chemin liant s et r_2 , nous obtenons un ℓ_1 -chemin entre r_1 et r_2 . \square

Lemme 6.2.4 *Le réseau construit par l'algorithme **Division-Fusion** est un réseau de Manhattan minimal pour l'ensemble T .*

Preuve. Soit N' un réseau de Manhattan minimal pour l'ensemble T , et N le réseau construit par l'algorithme **Division-Fusion**. D'après le lemme 6.2.3, N est un réseau de Manhattan pour l'ensemble T . Il suffit donc de montrer que N a la même taille que N' . Supposons le contraire. Il existe donc un bloc \mathcal{B} tel que $|\mathcal{B} \cap N'| < |\mathcal{B} \cap N|$. Ce qui est impossible, d'après le Lemme 6.2.2, car $\mathcal{B} \cap N'$ satisfait l'ensemble des points appartenant à $(T \cup A) \cap \mathcal{B}$ et que, par construction, $N \cap \mathcal{B}$ est le plus petit réseau qui satisfait cet ensemble de points. \square

Lemme 6.2.5 *Les étapes de division et de fusion de l'algorithme Division-Fusion s'effectuent en temps $O(n \log n)$.*

Preuve. En utilisant l'algorithme **CerclageR2L1** présenté dans la partie précédente, la construction de la chaîne d'arêtes délimitant la frontière de l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ s'effectue en temps $O(n \log n)$. A partir de cette chaîne, il est facile de repérer les points d'articulations car ce sont les sommets qui apparaissent deux fois dans la chaîne. \square

6.3 Propriétés des sous-problèmes

D'après la méthode de division que nous venons de décrire, nous supposons par la suite que l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ est un bloc indivisible. Nous supposons également que l'ensemble T est composé d'au moins quatre terminaux. Nous pouvons faire cette seconde supposition, car la construction d'un réseau de Manhattan minimal pour trois terminaux est triviale. Un sommet u qui appartient à la frontière de la grille de Pareto est dit *convexe*, s'il a exactement deux voisins v et w dans la grille, si les segments $[u, v]$ et $[u, w]$ forment un angle droit, et si $\text{conv}(\{u, v, w\}) \subset \mathcal{P}_{d_1}(T)$. Les instances que nous allons considérer ont la propriété géométrique suivante.

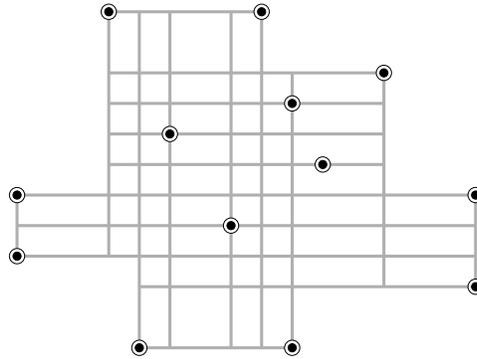


FIG. 6.4 – Un bloc indivisible

Lemme 6.3.1 *Soit T un ensemble de plus de trois terminaux tel que $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ est un bloc indivisible. Soit C la chaîne circulaire délimitant la frontière de $\mathcal{P}_{d_1}(T)$. Les assertions suivantes sont vérifiées :*

- (i) *tous les sommets convexes de C sont des terminaux ;*
- (ii) *la sous-chaîne $C(t_i, t_j)$ connectant deux terminaux convexes consécutifs, représente l'unique ℓ_1 -chemin connectant t_i et t_j à l'intérieur de $\mathcal{P}_{d_1}(T)$.*

Preuve. Montrons dans un premier temps l'assertion (i). Soit u un sommet convexe de la chaîne C . Supposons par contradiction que u n'est pas un terminal. Soit s_g, s_b les deux uniques voisins de u dans la grille de Pareto. Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que s_g est situé à gauche de u et s_b est dessous (Figure 6.5). Soit Π la cellule de la grille de sommets u, u', s_g et s_b tel que u et u' soient deux sommets diagonalement opposés de Π . Comme u est un sommet convexe, notons que la cellule Π appartient à $\mathcal{P}_{d_1}(T)$. D'après la définition de la

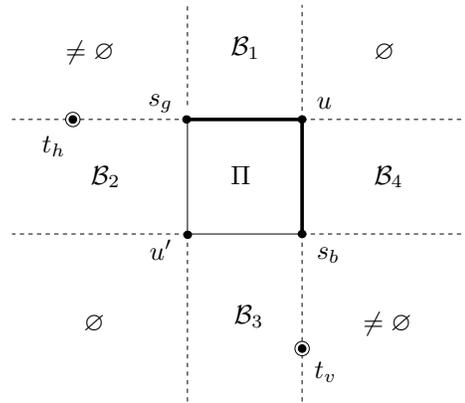


FIG. 6.5 – Illustration du Lemme 6.3.1

grille, nous savons qu'il existe un terminal t_v aligné verticalement avec u et un terminal t_h aligné horizontalement. Comme $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ est axe-parallèle convexe, et que les autres voisins de u dans la grille de Hanan n'appartiennent pas à $\mathcal{P}_{d_1}(T)$, nous déduisons que t_h est à gauche de u et t_v en dessous. Par conséquent, les orthants $\text{Ort}(\Pi, s_g)$ et $\text{Ort}(\Pi, s_b)$ ne sont pas vides. Comme u est un sommet convexe et que $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ est ℓ_1 -isométrique, nous déduisons que $\text{Ort}(\Pi, u)$ est vide. En effet, si un terminal t appartient à $\text{Ort}(\Pi, u)$, le ℓ_1 -chemin connectant t et u dans $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ devrait passer par un point situé au dessus de u ou à droite de u . Comme $\mathcal{P}_{d_1}(T) = \Upsilon_{d_1}(T)$, nous déduisons également que $\text{Ort}(\Pi, u')$ est vide. Dans le cas contraire, si un terminal appartenait à $\text{Ort}(\Pi, u')$, le sommet u n'appartiendrait pas à $\cup_{i=1}^n I_{d_1}(t, t_i)$, et donc pas à $\mathcal{P}_{d_1}(T)$. En utilisant la même égalité, comme les orthants portés par s_g et s_b ne sont pas vides et que les orthants portés par u et u' sont vides, nous déduisons que la frontière de Π appartient à la frontière de la grille de Pareto. Par conséquent, comme $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ est un bloc indivisible, nous déduisons que $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ et Π coïncident, et donc que $s_g = t_h$ et $s_b = t_v$. Comme T est composé d'au moins quatre terminaux, nous déduisons que tous les sommets de Π sont des terminaux. Cela contredit le fait que u n'est pas un terminal.

Pour montrer l'assertion (ii), remarquons que la sous-chaîne $C(t_i, t_j)$ est soit un segment vertical ou horizontal, soit un segment vertical et un segment horizontal en forme de L. Dans le premier cas, l'assertion est vérifiée car $R_{ij} = [t_i, t_j]$. Dans le second cas, comme t_i et t_j sont des sommets convexes et que $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ est axe-parallèle convexe, nous déduisons que $C(t_i, t_j) = R(t_i, t_j) \cap \mathcal{P}_{d_1}(T)$, et donc que l'assertion (ii) est également vérifiée. \square

Nous déduisons de cette propriété le corollaire suivant.

Corollaire 6.3.1 *Soit T un ensemble de plus de trois terminaux tel que $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ est un bloc indivisible. La frontière de l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ appartient à tout réseau de Manhattan minimal inclus dans $\mathcal{P}_{d_1}(T)$.*

Dans les chapitres qui suivent, nous appellerons *paire frontière* deux terminaux consécutifs appartenant à la chaîne C .

Chapitre 7

L'ensemble générateur bande-escalier

Certaines paires de terminaux de l'ensemble T possèdent des configurations particulières. Par exemple, deux terminaux t_i, t_j forment une *paire vide* si $R_{ij} \cap T = \{t_i, t_j\}$. En analysant les différentes configurations possibles, deux familles de paires particulières se dégagent : la famille des bandes et la famille des escaliers. Dans ce chapitre, nous définissons la notion d'ensemble générateur (il suffit de connecter les paires d'un tel ensemble par des ℓ_1 -chemins pour construire un réseau de Manhattan) et nous montrons que les paires des bandes et des escaliers forment un ensemble de ce type. Nous décrivons également la manière dont s'agencent les paires des deux familles, ainsi qu'un algorithme permettant de les localiser efficacement.

7.1 Ensemble générateur

Lors de la construction d'un réseau de Manhattan, il n'est pas nécessaire de s'intéresser à toutes les paires de terminaux de l'ensemble T . Pour cette raison, la notion d'*ensemble générateur* a été introduite dans [36]. Un ensemble générateur est un sous-ensemble F de paires de terminaux, tel que si un réseau satisfait les paires de l'ensemble F , alors ce réseau est un réseau de Manhattan. L'ensemble générateur que nous allons décrire va mettre en évidence certaines structures géométriques très utiles pour la construction d'un réseau de Manhattan.

L'ensemble des paires vides $F_\emptyset = \{(t_i, t_j) \in T^2 : R_{ij} \cap T = \{t_i, t_j\}\}$ est un ensemble générateur assez naturel. Par exemple, pour trois terminaux disposés comme sur la Fig. 7.1.(a), il est évident que $F_\emptyset = \{(t_1, t_2), (t_2, t_3)\}$ est un ensemble générateur car l'existence d'un ℓ_1 -chemin entre t_1 et t_2 , et entre t_2 et t_3 , implique l'existence d'un ℓ_1 -chemin entre t_1 et t_3 . D'autres types de déductions peuvent être faites à partir des *configurations croisées*. Deux paires de terminaux $(t_i, t_{i'})$ et $(t_j, t_{j'})$ forment une configuration croisée si et seulement si :

- $R_{ii'}$ et $R_{jj'}$ forment une croix ;
- les ℓ_1 -chemins entre t_i et $t_{i'}$ ont la même *orientation* que ceux entre t_j et $t_{j'}$.

Par exemple, les paires de la Figure 7.1.(b) forment une configuration croisée, car si on se déplace sur un ℓ_1 -chemin allant de t_i vers $t_{i'}$, ou de t_j vers $t_{j'}$, alors dans les deux cas on se déplace de droite à gauche et de haut en bas. Remarquons que les paires $(t_i, t_{i'})$ et $(t_j, t_{j'})$ de la Figure 7.1.(c) ne forment pas une configuration croisée car elles ne vérifient pas la deuxième condition. Les configurations croisées seront utilisées par la suite pour montrer que certains ensembles sont générateurs.

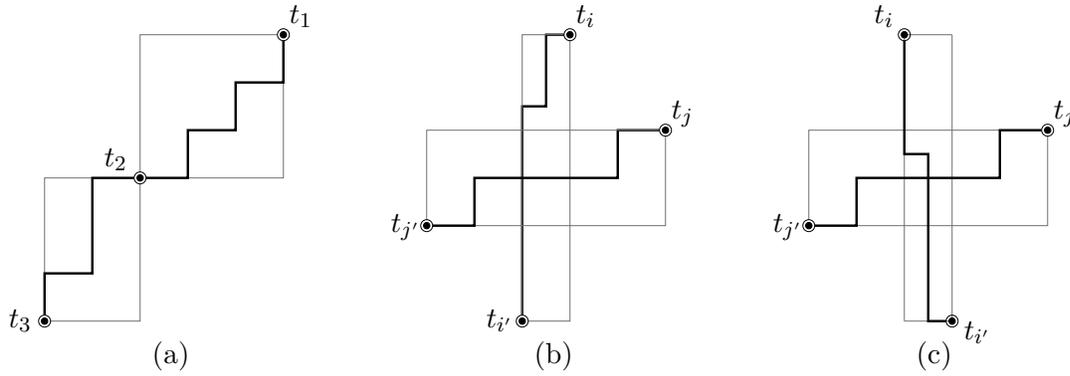


FIG. 7.1 – Paires génératrices

Lemme 7.1.1 Dans un réseau, si deux paires de terminaux $(t_i, t_{i'})$ et $(t_j, t_{j'})$ formant une configuration croisée sont satisfaites, alors les paires $(t_i, t_{j'})$ et $(t_j, t_{i'})$ sont également satisfaites.

Preuve. Soit N un réseau qui satisfait les paires $(t_i, t_{i'})$ et $(t_j, t_{j'})$. Soit L le ℓ_1 -chemin connectant t_i et $t_{i'}$ dans N , et soit L' celui connectant t_j et $t_{j'}$. Comme les deux paires forment une croix, il existe nécessairement un point r appartenant à L et L' . Comme les chemins L et L' ont la même orientation, nous déduisons que la partie de L allant de t_i à r et celle de L' allant de r à $t_{j'}$ forment un ℓ_1 -chemin entre t_i et $t_{j'}$, et que la partie de L' allant de t_j à r et celle de L allant de r à $t_{i'}$ forment un ℓ_1 -chemin entre t_j et $t_{i'}$. \square

La Figure 7.1.(c) montre l'importance de la deuxième condition dans la définition d'une configuration croisée.

7.2 Voisinage d'un terminal

La notion de voisinage décrite dans cette section permettra de définir formellement la famille des bandes et la famille des escaliers. Elle facilitera également l'élaboration d'un algorithme efficace permettant de localiser les paires qui constituent ces deux familles.

Les droites verticale et horizontale qui passent par un terminal t qui divise le plan en quatre quadrants (Fig. 7.2.(a)) notés dans le sens trigonométrique $\mathcal{Q}_1(t)$, $\mathcal{Q}_2(t)$, $\mathcal{Q}_3(t)$ et $\mathcal{Q}_4(t)$ (les deux demi-droites qui délimitent un quadrant appartiennent également à celui-ci). Pour $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $A_i(t)$ désigne le terminal $s \in \{\mathcal{Q}_i(t) \cap T\}$ tel que :

- s minimise la différence d'abscisses avec t ($\forall r \in \{\mathcal{Q}_i(t) \cap T\} : |t^x - s^x| \leq |t^x - r^x|$);
- $R(t, s) \cap T = \{t, s\}$ (utile si plusieurs terminaux vérifient la première condition).

Symétriquement, $O_i(t)$ désigne le terminal $s \in \{\mathcal{Q}_i(t) \cap T\}$ qui minimise la différence d'ordonnées avec t et tel que $R(t, s) \cap T = \{t, s\}$ (Fig. 7.2.(b)). Les terminaux $A_i(t)$ et $O_i(t)$ sont appelés voisins de t , et l'ensemble des paires de terminaux (r, s) tel que s est voisin de r est noté F_{vois} . Notons que l'ensemble F_{vois} est composé d'au plus $8n$ paires car un terminal ne possède pas plus de 8 voisins.

Lemme 7.2.1 L'ensemble F_{vois} est générateur.

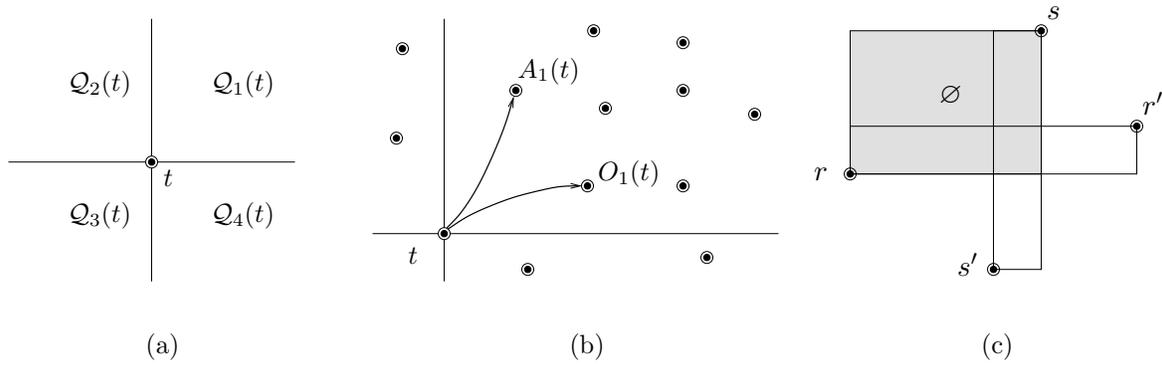


FIG. 7.2 – Voisinage d'un terminal et illustration du Lemme 7.2.1

.....

Calculer $O_1(T)$

- 1 Trier et numéroter T par ordonnées croissantes et abscisses croissantes en cas d'égalité
 - 2 $P \leftarrow \emptyset$, Empiler(P, t_1)
 - 3 **pour** $i \leftarrow 2$ à n **faire**
 - 4 **tant que** l'élément au sommet de P a une abscisse inférieure ou égale à t_i^x **faire**
 - 5 $s =$ Dépiler(P)
 - 6 $O_1(s) := t_i$
 - 7 **finfaire**
 - 8 Empiler(P, t_i)
 - 9 **finfaire**
 - 10 **tant que** la pile n'est pas vide **faire**
 - 11 $s =$ Dépiler(P)
 - 12 $O_1(s) := \emptyset$
 - 13 **finfaire**
-

Alg. 7.1 – Calculer $O_1(T)$

Preuve. Soit N un réseau rectilinéaire qui satisfait l'ensemble des paires de F_{vois} . Pour montrer que F_{vois} est un ensemble générateur, il faut montrer que N satisfait toutes les paires de terminaux appartenant à F_{\emptyset} (cela est suffisant car F_{\emptyset} est un ensemble générateur). Considérons sans perte de généralité une paire $(r, s) \in F_{\emptyset}$ tel que $s \in Q_1(r)$. Soit $r', s' \in T$ tel que $r' = O_1(r)$ et $s' = A_3(s)$ (Fig. 7.2.(c)). Si r est confondu avec s' ou si s est confondu avec r' , nous déduisons que N satisfait (r, s) car il s'agit dans ce cas d'une paire appartenant à F_{vois} . Si ces terminaux ne sont pas confondus, alors les paires (r', r) et (s, s') forment une configuration croisée et par conséquent, d'après le Lemme 7.1.1, N satisfait (r, s) . \square

Nous décrivons à présent l'algorithme permettant de déterminer $O_1(t)$ pour tout $t \in T$ (Alg. 7.1). Les algorithmes pour les autres types de voisins sont similaires. Dans un premier temps, les terminaux sont triés par ordonnées croissantes et abscisses croissantes en cas d'égalité d'ordonnées. Ils sont ensuite numérotés et considérés dans l'ordre l'un après l'autre. Dans cet ordre, remarquons que si $O_1(t) = r$ alors r est le premier terminal situé après t dont l'abscisse

est supérieure ou égale à t^x . L'algorithme va donc utiliser cette propriété pour déterminer le voisin de chaque terminal. À l'itération i de l'algorithme, les terminaux dont le voisin est situé de la position 1 à $i - 1$ ont été déterminés, et les terminaux situés de la position 1 à $i - 1$ dont le voisin est situé de la position i à n ont été empilés dans l'ordre dans une pile P . Par construction, remarquons que ces terminaux ont nécessairement été empilés par ordonnées croissantes et abscisses décroissantes. Pour passer de l'itération i à $i + 1$, il faut sortir de la pile les terminaux qui ont pour voisin t_i et empiler t_i . D'après la remarque précédente, ces terminaux sont placés de façon contiguë en haut de la pile. Il suffit donc de les dépiler l'un après l'autre tant qu'ils ont une abscisse inférieure ou égale à t_i^x (lignes 4–7). Après la dernière itération, les terminaux qui se trouvent encore dans la pile sont les terminaux t qui ne possèdent pas de voisin dans le quadrant $\mathcal{Q}_1(t)$ (lignes 10–13).

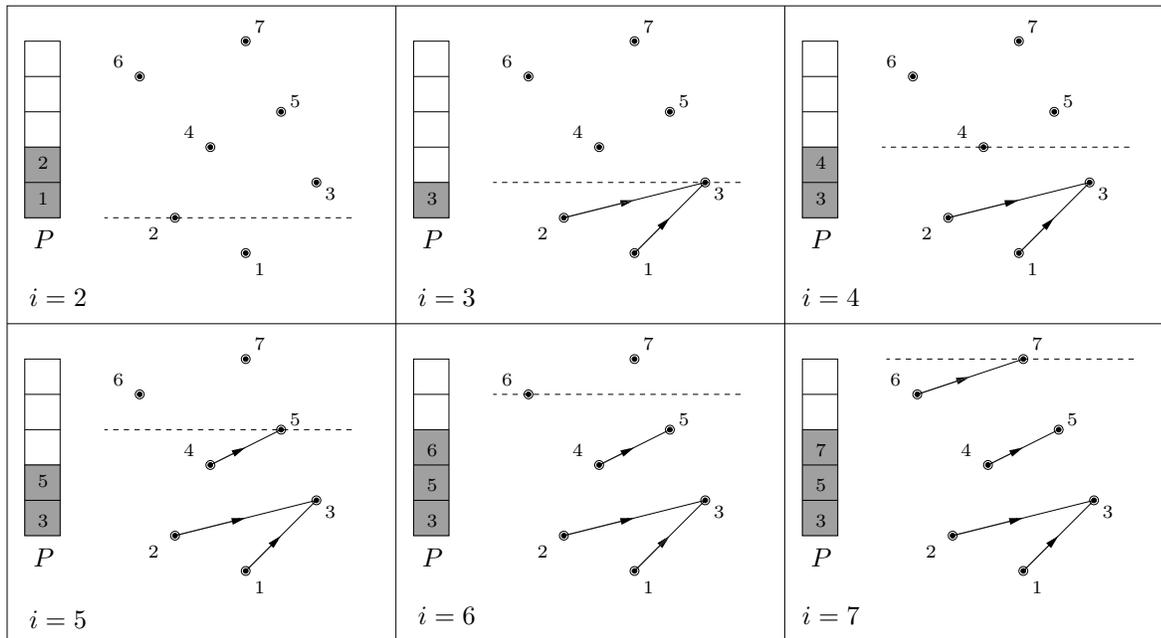


FIG. 7.3 – Déroulement de l'algorithme $\text{Calculer}O_1(T)$

La Figure 7.3 décrit le déroulement de l'algorithme $\text{Calculer}O_1(T)$ sur un ensemble de sept terminaux. Sur cette figure, pour chaque valeur de i , nous avons décrit l'état de la pile et représenté par des flèches les voisins précédemment déterminés (une flèche va de t vers r si $O_1(t) = r$).

Lemme 7.2.2 *L'ensemble F_{vois} peut être déterminé en temps $O(n \log n)$.*

Preuve. Comme les terminaux sont empilés et dépilés au plus une fois, nous déduisons que le parcours des terminaux (lignes 3–9) s'effectue en temps $O(n)$. Par conséquent, la complexité est celle du tri de la ligne 1. \square

7.3 La famille des bandes horizontales et verticales

Un rectangle vide dégénéré R_{ij} est appelé *bande horizontale dégénérée* si $t_i^y = t_j^y$. Un rectangle vide non-dégénéré R_{ij} est appelé *bande horizontale* si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- t_i^y et t_j^y sont des valeurs consécutives dans la liste triée des ordonnées des terminaux ;
- l'intersection de R_{ij} avec toute bande horizontale dégénérée est vide ou égale à t_i ou t_j .

La Figure 7.4.(a) représente les bandes horizontales d'un ensemble de terminaux. Les *bandes*

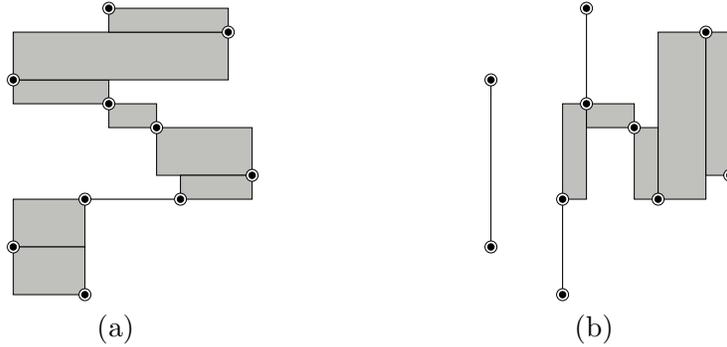


FIG. 7.4 – Bandes horizontales et verticales

verticales dégénérées et les *bandes verticales* sont définies de la même manière en considérant les abscisses des terminaux au lieu de leurs ordonnées (Fig. 7.4.(b)). Notons que la première condition de la définition est suffisante s'il n'existe pas de terminaux alignés horizontalement ou verticalement car, dans ce cas, il n'y a pas de bande dégénérée. L'ensemble des paires formant une bande est noté F_{band} .

Les bandes peuvent aussi être définies en utilisant le voisinage des terminaux. Un rectangle R_{ij} est une bande horizontale (dégénérée ou pas) si $O_1(t_i) = t_j$ et $O_3(t_j) = t_i$, ou si $O_2(t_i) = t_j$ et $O_4(t_j) = t_i$. Un rectangle R_{ij} est une bande verticale si $A_1(t_i) = t_j$ et $A_3(t_j) = t_i$, ou si $A_2(t_i) = t_j$ et $A_4(t_j) = t_i$. En utilisant ces définitions, nous obtenons un algorithme simple permettant de déterminer l'ensemble des bandes (Alg. 7.2). Dans cet algorithme, BV désigne l'ensemble des bandes verticales et BH l'ensemble des bandes horizontales. Remarquons que le nombre de bandes est linéaire car un terminal appartient à au plus quatre bandes (deux horizontales et deux verticales).

Lemme 7.3.1 *L'algorithme LocaliserBandes détermine l'ensemble F_{band} en temps $O(n \log n)$.*

Preuve. D'après la définition utilisant le voisinage, il est évident que l'algorithme repère toutes les bandes. En terme de complexité, l'algorithme nécessite le calcul des voisins de chacun des terminaux, soit $O(n \log n)$ d'après le Lemme 7.2.2, et un test en temps constant pour chaque terminal. \square

Avant de définir les escaliers, intéressons nous à l'intersection de la grille de Hanan ou de la grille de Pareto avec une bande R_{ij} . Remarquons que tout ℓ_1 -chemin connectant t_i et t_j dans l'une de ces grilles a la forme suivante : il part de t_i en longeant l'un des côtés de la bande,

LocaliserBandes(T)

```

1   $BV \leftarrow \emptyset$ 
2   $BH \leftarrow \emptyset$ 
3  Calculer  $F_{\text{vois}}$ 
4  pour  $i \leftarrow 1$  à  $n$  faire
5      si  $t_i = O_3(O_1(t_i))$  alors  $BH := BH \cup (t_i, O_1(t_i))$ 
6      si  $t_i = O_4(O_2(t_i))$  alors  $BH := BH \cup (t_i, O_2(t_i))$ 
7      si  $t_i = A_3(A_1(t_i))$  alors  $BV := BV \cup (t_i, A_1(t_i))$ 
8      si  $t_i = A_4(A_2(t_i))$  alors  $BV := BV \cup (t_i, A_2(t_i))$ 
9  fin faire

```

Alg. 7.2 – LocaliserBandes(T)

tourne au niveau d'une arête que nous appellerons *arête de passage*, puis continue jusqu'à t_j en longeant le coté opposé. D'après la définition des bandes, notons que si e et e' sont des arêtes de passage de deux bandes différentes, alors e et e' ne sont pas parallèles. Notons également qu'une arête appartenant à la frontière de l'enveloppe de Pareto est parallèle aux arêtes de passage d'une seule bande.

7.4 La famille des escaliers

Les bandes horizontales et verticales partitionnent le plan en plusieurs régions. Les escaliers sont localisés dans certaines de ces régions (Fig. 7.5). Soit $R_{ii'}$ une bande verticale et $R_{jj'}$ une

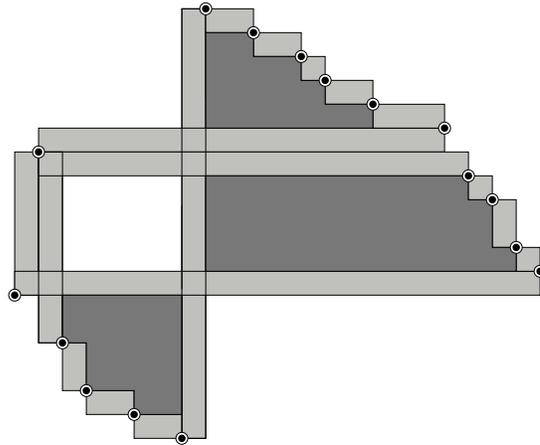


FIG. 7.5 – Agencement des bandes et des escaliers

bande horizontale qui s'intersectent en formant une configuration croisée comme sur la Figure 7.6. Soit o le point d'intersection de la droite verticale qui passe par t_i et de la droite horizontale qui passe par t_j . L'ensemble des terminaux $t_k \in (\mathcal{Q}_1(o) \setminus \{t_i, t_j\})$ tel que $O_3(t_k) = t_j$ et $A_3(t_k) = t_i$ est noté T_{ij} . Si cet ensemble n'est pas vide, le polygone rectilinéaire formé par l'union des $R(t_k, o)$

tel que $t_k \in T_{ij}$ est noté $\mathcal{S}_{ij|i'j'}$ et il est appelé *escalier* d'origine o . L'ensemble des paires $(t_k, t_{i'})$ et $(t_k, t_{j'})$ tel que $t_k \in T_{ij}$ est appelé *ensemble des paires formant l'escalier* $\mathcal{S}_{ij|i'j'}$. Le nombre de terminaux de T_{ij} désigne la *taille* de l'escalier. Géométriquement, pour chaque terminal $t_k \in T_{ij}$, remarquons que $R_{ii'}$ est la bande la plus à droite qui intersecte $\mathcal{Q}_3(t_k)$ et que $R_{jj'}$ est la bande la plus haute qui intersecte $\mathcal{Q}_3(t_k)$.

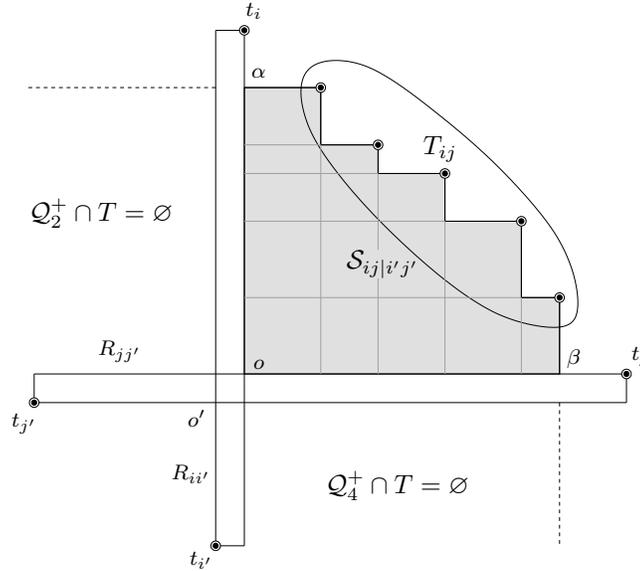


FIG. 7.6 – Un escalier

Trois autres types d'escaliers orientés différemment peuvent également être définis (Fig. 7.7). Par exemple, l'escalier $\mathcal{S}_{i'j'|ij}$ d'origine $o' = (t_{i'}^x, t_{j'}^y)$ composé des terminaux $T_{i'j'} = \{t_k \in (\mathcal{Q}_3(o') \setminus \{t_{i'}, t_{j'}\}) : O_1(t_k) = t_j \text{ et } A_1(t_k) = t_i\}$. Les deux autres types sont définis à partir de bandes formant une configuration croisée symétrique à celle de la Fig. 7.6. Nous noterons F_{esc} l'union des ensembles de paires de terminaux formant chaque escalier.

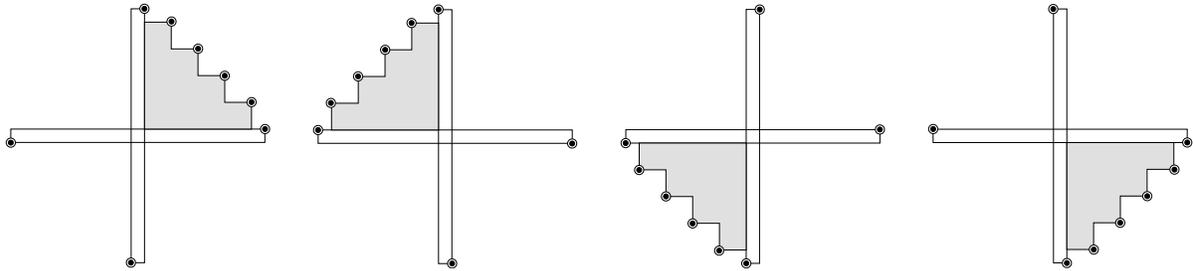


FIG. 7.7 – Orientations des escaliers

Par la suite, sans perte de généralité, les preuves et les algorithmes seront décrits pour des escaliers orientés comme sur la Figure. 7.6 afin d'éviter certaines répétitions dues aux symétries. Nous adopterons également les notations suivantes. Le point le plus proche de t_i appartenant à l'escalier $\mathcal{S}_{ij|i'j'}$ est noté α et le plus proche de t_j est noté β . Le ℓ_1 -chemin entre α et β qui passe par tous les terminaux de T_{ij} et qui délimite la frontière de $\mathcal{S}_{ij|i'j'}$ est noté M_{ij} . Etant donné que les terminaux de T_{ij} ont pour voisins $t_{i'}$ et $t_{j'}$, remarquons que $\mathcal{S}_{ij|i'j'} \cap T = T_{ij}$ et que les

régions $\mathcal{Q}_2^+ := \{q \in \mathcal{Q}_2(o) : q^y \leq \alpha^y\}$ et $\mathcal{Q}_4^+ := \{q \in \mathcal{Q}_4(o) : q^x \leq \beta^x\}$ ne contiennent aucun terminal.

Nous décrivons à présent l'algorithme permettant de localiser les escaliers orientés comme sur la Fig. 7.6. Cet algorithme consiste à former des groupes représentant chacun les terminaux appartenant à un escalier. Dans un premier temps, les terminaux sont donc groupés de telle sorte que deux terminaux r et s appartiennent au même groupe si $O_3(r) = O_3(s)$ et $A_3(r) = A_3(s)$. Ensuite, dans chacun de ces groupes, chaque terminal t qui forme une bande avec $O_3(t)$ ou $A_3(t)$ est supprimé. Par exemple, pour l'escalier de la Fig. 7.6, si l'algorithme obtient un groupe composé des terminaux de T_{ij} ainsi que t_i et t_j , alors ces deux derniers sont supprimés car, par définition, t_i et t_j n'appartiennent pas à T_{ij} . À la fin de l'algorithme, chaque groupe non-vide représente l'ensemble des terminaux appartenant à un escalier.

Pour former les groupes, les terminaux sont numérotés arbitrairement et ordonnés de telle sorte que les terminaux d'un même groupe soient consécutifs. Pour cela, dans cet ordre, un terminal r est placé avant un terminal s si le numéro du terminal $O_3(r)$ est inférieur au numéro du terminal $O_3(s)$, ou si $O_3(r) = O_3(s)$ et si le numéro du terminal $A_3(r)$ est inférieur au numéro du terminal $A_3(s)$. Les groupes sont ensuite extraits en effectuant un simple parcours. L'étape de suppression s'effectue également en parcourant les terminaux et en supprimant un terminal t si $O_1(O_3(t)) = t$ ou si $A_1(A_3(t)) = t$.

Lemme 7.4.1 *L'ensemble F_{esc} peut être déterminé en temps $O(n \log n)$.*

Preuve. L'algorithme s'effectue en temps $O(n \log n)$ car il nécessite le calcul des voisins, un tri spécifique, et un test en temps constant pour chaque terminal. \square

Nous appellerons taille d'un escalier $\mathcal{S}_{ij|i'j'}$ le nombre de terminaux appartenant à T_{ij} . Remarquons que la somme des tailles de chaque escalier est linéaire car un terminal appartient au maximum à quatre escaliers (au plus un pour chaque orientation).

7.5 L'ensemble générateur bande-escalier

L'importance des bandes et des escaliers pour le problème du réseau de Manhattan réside dans le résultat suivant.

Lemme 7.5.1 *$F_{band} \cup F_{esc}$ est un ensemble générateur.*

Preuve. Soit N un réseau rectilinéaire qui satisfait l'ensemble des paires de $F_{band} \cup F_{esc}$. Il faut montrer que N satisfait toutes les paires de F_{\emptyset} (cela est suffisant car F_{\emptyset} est un ensemble générateur). Considérons sans perte de généralité une paire $(t_k, t_{k'}) \in (F_{\emptyset} \setminus (F_{band} \cup F_{esc}))$ tel que $t_k \in \mathcal{Q}_1(t_{k'})$. Les droites horizontales et verticales passant par t_k et $t_{k'}$ divisent l'espace en quatre quadrants et quatre demi-bandes notées dans le sens trigonométrique $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ et \mathcal{B}_4 (Fig. 7.8). Comme $t_k \in (\mathcal{B}_1 \cap T)$ et $t_{k'} \in (\mathcal{B}_3 \cap T)$, il existe nécessairement une bande verticale entre un terminal de \mathcal{B}_1 et un terminal de \mathcal{B}_3 (cette bande traverse $R_{kk'}$). La bande verticale la plus à gauche qui traverse $R_{kk'}$ est notée $R_{i_1 i'_1}$. La bande verticale la plus à droite est notée $R_{i_2 i'_2}$. Ces deux bandes peuvent coïncider mais sont cependant différentes de $R_{kk'}$ car $(t_k, t_{k'}) \notin (F_{band} \cup F_{esc})$. Supposons sans perte de généralité que $t_{i_1}, t_{i_2} \in \mathcal{B}_1$ et $t_{i'_1}, t_{i'_2} \in \mathcal{B}_3$. De la même manière, la bande horizontale la plus basse qui traverse $R_{kk'}$ est notée $R_{j_1 j'_1}$ et la

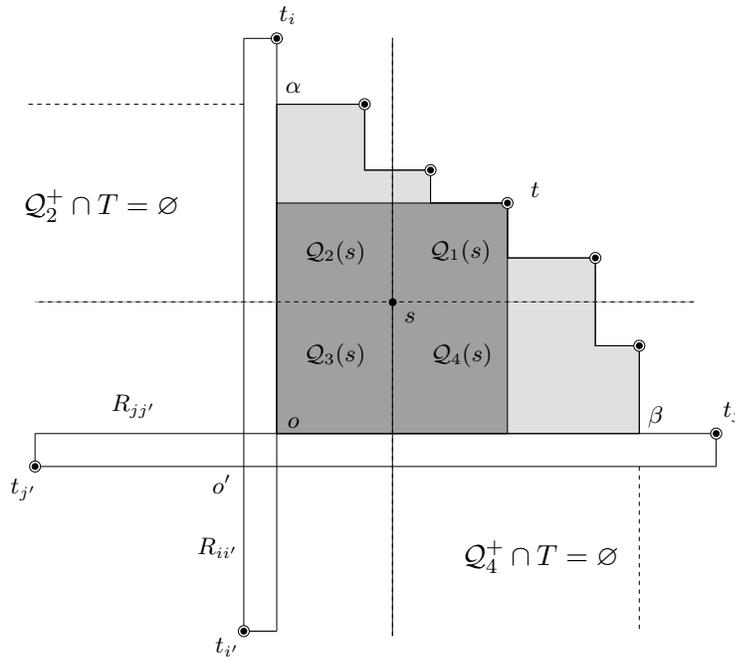


FIG. 7.9 – Illustration du Lemme 7.6.1

Preuve. Voici la preuve de chacune de ces assertions :

1. Conséquence de la définition des bandes.
2. Pour chaque escalier $\mathcal{S}_{ij|i'j'}$, nous savons que les régions \mathcal{Q}_2^+ et \mathcal{Q}_4^+ ne contiennent pas de terminal (Fig. 7.6). Par conséquent, il est impossible qu'une bande traverse la région $\mathcal{S}_{ij|i'j'}$.
3. Supposons par contradiction qu'un point s appartienne à l'intérieur d'un escalier $\mathcal{S}_{ij|i'j'}$ d'origine o et à un autre escalier $\mathcal{S}_{kl|k'l'}$ d'origine o' . Comme le point s appartient à l'intérieur de l'escalier $\mathcal{S}_{ij|i'j'}$ et à $\mathcal{S}_{kl|k'l'}$, nous déduisons qu'il existe un terminal t appartenant à T_{ij} tel que s appartient à l'intérieur du rectangle $R(t, o)$, et un terminal t' appartenant à T_{kl} tel que s appartient au rectangle $R(t', o')$. Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que l'escalier $\mathcal{S}_{ij|i'j'}$ est orienté comme sur la Figure 7.9. Les droites verticale et horizontale passant par s divisent le plan en quatre quadrants. Nous allons analyser la position de t' et o' par rapport à ces quadrants. D'après la définition de ces différents points, notons que :

- (a) $R(t', o') \cap T = t'$ et $R(t, o) \cap T = t$ car le rectangle $R(t', o')$ définit la région $\mathcal{S}_{kl|k'l'}$, et le rectangle $R(t, o)$ la région $\mathcal{S}_{ij|i'j'}$;
- (b) $R(t', o')$ peut uniquement intersecter une bande sur sa frontière d'après l'assertion 2 de ce lemme ;
- (c) o' est le point d'intersection d'une bande verticale et d'une bande horizontale.

De plus, notons que t' et o' appartiennent à deux quadrants opposés car $s \in R(t', o')$. Les quatre cas suivants sont donc à considérer :

- $o' \in \mathcal{Q}_3(s)$ et $t' \in \mathcal{Q}_1(s)$. Nous déduisons d'après (b) que o' appartient à $R(t, o)$, et d'après (c) que $o = o'$. Cela contredit le fait que les deux escaliers sont différents ;

- $o' \in \mathcal{Q}_1(s)$ et $t' \in \mathcal{Q}_3(s)$. Comme les zones \mathcal{Q}_2^+ et \mathcal{Q}_4^+ sont vides et que c'est également le cas pour le rectangle $R(t, o)$, nous déduisons que $t' \in \mathcal{Q}_3(o)$. D'après (b) cela est impossible.
 - $o' \in \mathcal{Q}_2(s)$ et $t' \in \mathcal{Q}_4(s)$. Comme la zone \mathcal{Q}_4^+ est vide et que c'est également le cas pour la rectangle $R(t, o)$, nous déduisons que t' est à droite de t . Comme une bande horizontale et une bande verticale ne peuvent pas s'intersecter à l'intérieur strict des régions \mathcal{Q}_2^+ ou $\mathcal{S}_{ij|i'j'}$, nous déduisons que o' est au dessus de t . Nous concluons que $t \in R(t', o')$, cela contredit la remarque (a).
 - $o' \in \mathcal{Q}_4(s)$ et $t' \in \mathcal{Q}_2(s)$. Il s'agit d'un cas symétrique au précédent.
- L'assertion 3 est donc vérifiée. □

D'après cette propriété, nous déduisons le corollaire suivant :

Corollaire 7.6.1 *Une arête e de la grille de Hanan ou de la grille de Pareto vérifie les assertions suivantes :*

1. *e appartient à au plus deux escaliers, et si c'est le cas, alors e appartient à leurs frontières ;*
2. *e appartient à au plus deux bandes horizontales (resp. verticales), et si c'est la cas, alors e appartient à leurs frontières ;*
3. *e ne peut pas appartenir à un escalier et à deux bandes horizontales (resp. verticales) ;*
4. *e ne peut pas appartenir à deux escaliers et une bande horizontale (resp. verticale) ;*

Chapitre 8

Formulation en programmation linéaire en nombres entiers

Ce chapitre décrit la manière dont la grille de Pareto et la grille de Hanan sont utilisées pour formuler un programme linéaire en nombres entiers permettant de résoudre le problème du réseau de Manhattan minimal. Ce programme est relaxé pour obtenir un programme linéaire primal et son dual sur lesquels reposent les analyses des algorithmes que nous allons décrire.

8.1 Notion de coupe

Soit $\Gamma = (V, E)$ le graphe désignant la grille de Hanan ou la grille de Pareto. Pour chaque paire de terminaux (t_i, t_j) , l'intersection de $\Gamma = (V, E)$ avec R_{ij} forme un graphe noté $\Gamma_{ij} = (V_{ij}, E_{ij})$, où V_{ij} et E_{ij} sont respectivement les intersections de V et de E avec R_{ij} . Dans ce graphe, les arêtes de E_{ij} sont orientées tel que tout chemin de t_i vers t_j soit un ℓ_1 -chemin (Fig. 8.1.(a)).

Un sous-ensemble d'arêtes C de E_{ij} forme une (t_i, t_j) -coupe si tout chemin entre t_i et t_j dans Γ_{ij} contient au moins une arête de C . L'ensemble de toutes les (t_i, t_j) -coupes est noté \mathcal{C}_{ij} . Sur la

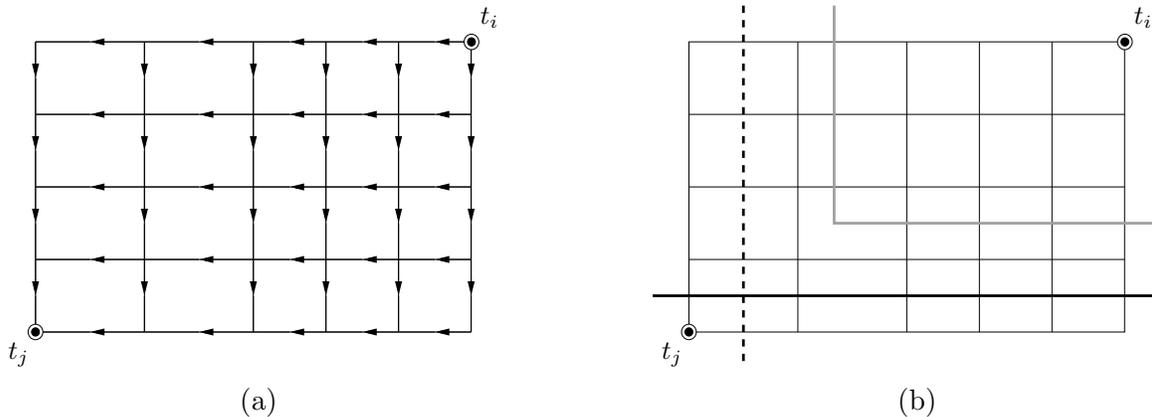


FIG. 8.1 – Le graphe Γ_{ij} et trois types de (t_i, t_j) -coupes

Figure 8.1.(b), les trois traits (noir, gris et pointillé) passent chacun par un ensemble d'arêtes formant une (t_i, t_j) -coupe. Nous donnerons un nom particulier à chacune d'elles : *coupe horizontale*

pour celle représentée par le trait noir, *coupe verticale* pour celle représentée par le trait pointillé, et *coupe en L* pour celle représentée par le trait gris.

8.2 Programme linéaire en nombres entiers

La notion de (t_i, t_j) -coupe étant introduite, nous pouvons à présent décrire le programme linéaire en nombres entiers (PLNE) dont la solution optimale correspond à un réseau de Manhattan minimal. A chaque arête e du graphe Γ est associée une constante l_e égale à la longueur de l'arête, et une variable de décision binaire x_e qui indique si l'arête e appartient ou pas au réseau correspondant à la solution du PLNE. L'ensemble F désigne un ensemble générateur arbitraire et $\mathcal{C} := \cup_{(t_i, t_j) \in F} \mathcal{C}_{ij}$ l'ensemble des (t_i, t_j) -coupes définies à partir des paires de l'ensemble F . Voici la description du programme linéaire en nombres entiers qui peut être vu comme un problème de couverture d'ensembles (couverture des coupes par les arêtes) :

$$\begin{aligned} \text{minimiser} \quad & \sum_{e \in E} l_e x_e & (1) \\ \text{contraint par} \quad & \sum_{e \in C} x_e \geq 1, \quad C \in \mathcal{C} \\ & x_e \in \{0, 1\}, \quad e \in E \end{aligned}$$

A chaque solution admissible de ce programme en nombres entiers correspond un réseau constitué des arêtes e de Γ dont la variable x_e est égale à 1. L'objectif est de minimiser la somme des longueurs des arêtes prises dans la solution. Les contraintes expriment le fait que toute solution réalisable intersecte toutes les coupes de \mathcal{C} .

Lemme 8.2.1 *Le réseau correspondant à la solution optimale du programme (1) est un réseau de Manhattan minimal.*

Preuve. Il est évident qu'à tout réseau de Manhattan correspond une solution réalisable du programme linéaire. Inversement, pour toute solution de ce programme, si on considère que les valeurs des x_e représentent les capacités des arêtes de Γ et qu'on applique les contraintes de couverture et le théorème de Ford-Fulkerson [23, 53] à chaque réseau Γ_{ij} tel que $(t_i, t_j) \in F$, nous concluons qu'il existe un (t_i, t_j) -flot entier de valeur 1 dans chaque graphe orienté Γ_{ij} (ce flot correspond à un ℓ_1 -chemin entre t_i et t_j). Le réseau correspondant à la solution optimale du programme linéaire en nombres entiers est donc un réseau de Manhattan minimal. \square

8.3 Programme linéaire primal (relaxation linéaire)

La relaxation des variables entières du PLNE précédent permet d'obtenir le programme linéaire suivant :

$$\text{minimiser} \quad \sum_{e \in E} l_e x_e \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{contraint par } \quad & \sum_{e \in C} x_e \geq 1, \quad C \in \mathcal{C} \\ & 0 \leq x_e \leq 1, \quad e \in E \end{aligned}$$

Comme précédemment, les contraintes assurent l'existence d'un (t_i, t_j) -flot de valeur 1 pour chaque réseau orienté Γ_{ij} . Cependant ce flot peut être fractionnaire et se ramifier en utilisant plusieurs ℓ_1 -chemins. Il est intéressant de noter qu'il existe certaines instances pour lesquelles le coût de la solution optimale entière de (1) est supérieure au coût de la solution optimale fractionnaire de (2). Les points extrêmes de (2) ne sont donc pas tous à coordonnées entières. La Figure 8.2 représente une instance pour laquelle cette différence de coûts existe ($x_e = 1$ pour les arêtes en gras et $x_e = \frac{1}{2}$ pour les arêtes en pointillés).

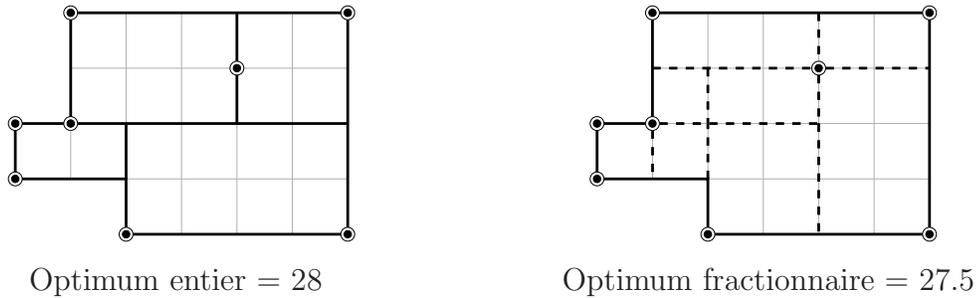


FIG. 8.2 – Gap d'intégralité

Malgré un nombre exponentiel de contraintes, la résolution du programme linéaire peut s'effectuer en temps polynomial en utilisant l'algorithme de l'ellipsoïde de Khachian [47] car il existe un oracle séparateur permettant de trouver une contrainte non satisfaite en temps polynomial. Pour cela, il suffit de considérer une nouvelle fois les x_e comme les capacités des arêtes et de tester, pour chaque graphe Γ_{ij} , s'il existe une (t_i, t_j) -coupe dont la capacité est inférieure à 1.

Une autre possibilité permettant de résoudre ce programme linéaire en temps polynomial consiste à trouver un programme linéaire équivalent possédant un nombre polynomial de variables et de contraintes, puis à utiliser l'algorithme de Tardos [64] pour le résoudre en temps fortement polynomial. En s'appuyant sur les observations faites précédemment concernant l'existence d'un (t_i, t_j) -flot, un tel programme peut être formulé. Pour chaque paire $(t_i, t_j) \in F$ et chaque arête $e \in E_{ij}$, une variable de flot f_e^{ij} est introduite. Pour chaque sommet $v \in V_{ij} \setminus \{t_i, t_j\}$, les arêtes orientées de Γ_{ij} qui entrent dans v sont notées $\Gamma_{ij}^+(v)$ et celles qui en sortent sont notées $\Gamma_{ij}^-(v)$. Voici donc ce programme linéaire, équivalent au programme (2), qui a également été introduit de façon indépendante par Benkert *et al.* [12] :

$$\begin{aligned} \text{minimiser} \quad & \sum_{e \in E} l_e x_e & (3) \\ \text{contraint par} \quad & \sum_{e \in \Gamma_{ij}^+(v)} f_e^{ij} = \sum_{e \in \Gamma_{ij}^-(v)} f_e^{ij}, \quad (t_i, t_j) \in F, v \in V_{ij} \setminus \{t_i, t_j\} \\ & \sum_{e \in \Gamma_{ij}^-(t_i)} f_e^{ij} = 1, \quad (t_i, t_j) \in F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 \leq f_e^{ij} \leq x_e, & & (t_i, t_j) \in F, \forall e \in E_{ij} \\ 0 \leq x_e \leq 1, & & e \in E \end{aligned}$$

Le premier type de contraintes concerne la conservation du f^{ij} -flot pour chaque sommet de Γ_{ij} différent de t_i et t_j . Le deuxième type de contraintes indique, pour chaque paire (t_i, t_j) , que le flot qui sort de t_i dans le graphe Γ_{ij} est égal à 1 (ce qui implique que le flot qui entre dans t_j vaut également 1). Le troisième type de contraintes indique, pour toute arête $e \in \Gamma$, que la valeur x_e est supérieure ou égale au plus grand flot qui la traverse (dans la solution optimale, x_e est égale à la valeur du plus grand flot qui la traverse car il s'agit d'un problème de minimisation).

Remarque 8.3.1 Si T est un ensemble de plus de trois terminaux tel que $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ est un bloc indivisible, nous déduisons du Corollaire 6.3.1 que toutes les variables associées aux arêtes de la frontière de Pareto ont pour valeur 1.

8.4 Programme linéaire dual

Pour chaque coupe $C \in \mathcal{C}$, nous introduisons une variable duale y_C et pouvons ainsi formuler le programme linéaire dual qui peut être vu comme un problème d'emballage de coupes (cut packing) :

$$\begin{aligned} \text{maximiser} & \quad \sum_{C \in \mathcal{C}} y_C & (4) \\ \text{contraint par} & \quad \sum_{C \in \mathcal{C}: e \in C} y_C \leq l_e & e \in E \\ & \quad y_C \geq 0 & C \in \mathcal{C} \end{aligned}$$

Une solution optimale de ce programme linéaire maximise la somme des variables duales associées aux coupes. Pour chaque arête $e \in E$, une contrainte spécifie que la somme des variables duales associées aux coupes qui contiennent e doit être inférieure ou égale à l_e .

La Figure 8.3 représente une solution primale et une solution duale pour une instance de huit terminaux engendrant une grille de Hanan unitaire. Pour ces deux solutions, les variables (primales et duales) ont pour valeur 0 ou 1. Sur la figure de gauche, les arêtes dont la variable primale est égale à 1 sont représentées en gras. Nous pouvons constater que c'est bien une solution primale car il s'agit d'un réseau de Manhattan. Sur la figure de droite, chaque coupe dont la variable duale est égale à 1 est représentée par un chemin qui passe par les arêtes qui la constituent. Nous pouvons vérifier que c'est bien une solution duale car une arête appartient à une coupe au maximum (une coupe de valeur 1 pour une arête de longueur 1). Comme les deux solutions ont le même coût, par dualité [53, 72] nous déduisons qu'elles sont optimales.

8.5 Principes d'analyse

Par la suite, nous allons utiliser les formulations primale et duale pour justifier le facteur d'approximation de nos différents algorithmes. Afin de se familiariser avec les deux *principes d'analyse* employés [72], nous en décrivons les grandes lignes de manière informelle.

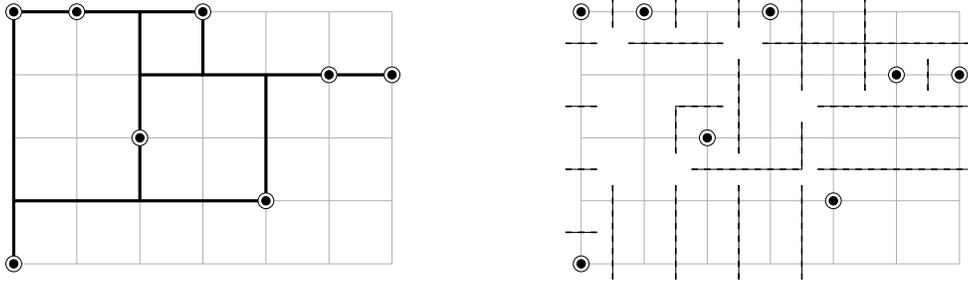


FIG. 8.3 – Solutions primale et duale optimales

Méthode par arrondis. La méthode consiste à calculer une solution optimale primale \mathbf{x} et à modifier les valeurs de certaines variables, sans changer le coût de la solution, afin d'obtenir un f^{ij} -flot demi-entier entre chaque paire (t_i, t_j) de terminaux, *i.e.* un chemin de Manhattan composé d'arêtes dont la valeur est supérieure à 0.5. Une fois la solution obtenue, les variables supérieures à $\frac{1}{2}$ sont arrondies à 1 pour obtenir une solution \mathbf{x}^* correspondant à un réseau de Manhattan N^* dont la longueur est inférieure à $2 \cdot |N_{\text{opt}}|$. En effet,

$$|N^*| = \text{coût}(\mathbf{x}^*) = \sum_{e \in E} l_e x_e^* \leq 2 \sum_{e \in E} l_e x_e = 2 \cdot \text{coût}(\mathbf{x}) \leq 2 \cdot |N_{\text{opt}}|.$$

Les modifications de la solution \mathbf{x} consistent à considérer les variables de deux arêtes parallèles et à diminuer la valeur de l'une pour augmenter la valeur de l'autre (une telle opération ne change pas le coût de la solution car deux arêtes parallèles ont la même longueur).

Méthode primale-duale. La méthode consiste à construire un réseau de Manhattan N^* à l'aide d'un algorithme combinatoire et à exhiber une solution duale \mathbf{y}^* dont le coût est égal à $\frac{1}{k} \cdot |N^*|$ pour montrer que l'algorithme est de facteur k . En effet, si nous notons \mathbf{x} une solution optimale primale et \mathbf{y} une solution optimale duale, nous avons :

$$|N^*| = k \cdot \text{coût}(\mathbf{y}^*) \leq k \cdot \text{coût}(\mathbf{y}) = k \cdot \text{coût}(\mathbf{x}) \leq k \cdot |N_{\text{opt}}|.$$

Chapitre 9

Algorithmes

Ce chapitre présente trois algorithmes d'approximation pour le problème du réseau de Manhattan minimal. Le premier est un algorithme d'approximation de facteur 2 qui utilise la méthode d'approximation par arrondis. Le second est un algorithme de facteur 3 en temps $O(n \log n)$ justifié à l'aide de la méthode primale-duale. Le dernier est un algorithme en temps $O(n \log n)$ plus évolué qui a pour facteur 2 et qui utilise également la méthode primale-duale. A la fin du chapitre, les performances pratiques de ces différents algorithmes sont comparées.

9.1 Un algorithme par arrondis de facteur 2

Cette section présente un algorithme d'approximation de facteur 2 pour le problème du réseau de Manhattan minimal. Cet algorithme, appelé `ManhattanArrondi2`, considère une solution optimale du programme linéaire primal et construit une solution entière à partir de celle-ci en utilisant une méthode d'arrondis. La justification du facteur d'approximation de cet algorithme est basée sur le fait qu'à chaque arête de la solution entière produite par l'algorithme, nous pouvons associer un sous-ensemble d'arêtes de même longueur qui supporte un flot de valeur supérieure à $\frac{1}{2}$ dans la solution fractionnaire.

9.1.1 L'algorithme `ManhattanArrondi2`

L'algorithme `ManhattanArrondi2` consiste à calculer la solution optimale du programme linéaire (3) et à réaliser une succession d'arrondis sur cette solution. Une première série d'arrondis, effectuée dans la phase 1, permet de satisfaire les paires de l'ensemble F_{band} . Une seconde série, effectuée dans la deuxième phase, permet ensuite de satisfaire les paires de l'ensemble F_{esc} . La solution optimale du programme linéaire (3) calculée au début de l'algorithme, sur la grille de Pareto $\Gamma = (V, E)$, est notée $(\mathbf{x}, \mathbf{f}) = ((x_e)_{e \in E}, (f_e^{ij})_{e \in E, ij \in F})$. Voici le détail de ces deux phases.

Phase 1. Les propriétés suivantes sont utilisées dans cette phase pour satisfaire chaque bande $R_{ii'}$. Si $R_{ii'}$ est dégénérée alors $[t_i, t_{i'}]$ est l'unique ℓ_1 -chemin entre t_i et $t_{i'}$, par conséquent $x_e = f_e^{ii'} = 1$ pour toute arête $e \in [t_i, t_{i'}]$. Si $R_{ii'}$ n'est pas dégénérée alors tous les ℓ_1 -chemins qui connectent t_i et $t_{i'}$ dans la grille ont une forme assez simple : ils vont de t_i vers $t_{i'}$ en utilisant une seule arête de passage verticale si $R_{ii'}$ est une bande horizontale, ou une seule arête de passage horizontale si $R_{ii'}$ est une bande verticale. La forme de ces ℓ_1 -chemins permet d'obtenir la propriété de monotonie suivante : lorsqu'on parcourt les arêtes situées sur l'un des côtés de la bande

contenant le terminal t_i (resp. $t_{i'}$) en s'éloignant de celui-ci, la valeur du $f^{ii'}$ -flot diminue, i.e., $f_e^{ii'} \geq f_{e'}^{ii'}$ si e est plus proche de t_i (resp. $t_{i'}$) que e' (Fig. 9.1.(a)). Ce flot est donc monotone sur chacun des côtés de la bande. Les contraintes sur les $(t_i, t_{i'})$ -coupes, quant à elles, assurent que $x_e + x_{e'} \geq f_e^{ii'} + f_{e'}^{ii'} \geq 1$ pour toute paire d'arêtes jumelles (e, e') appartenant à deux côtés opposés de la bande $R_{ii'}$ (Fig. 9.1.(b)), et donc que $\max\{x_e, x_{e'}\} \geq \frac{1}{2}$. Soit (p, p') l'arête de passage de $R_{ii'}$ la plus éloignée de t_i tel que $x_e \geq \frac{1}{2}$ pour toute arête e du segment $[t_i, p]$ (p appartient au côté qui contient t_i et p' appartient au côté qui contient $t_{i'}$). D'après les remarques précédentes et le choix de (p, p') , nous déduisons que $x_{e'} \geq \frac{1}{2}$ pour toute arête e' du segment $[p', t_{i'}]$ (Fig. 9.1.(c)). L'arête (p, p') quant à elle peut avoir une valeur inférieure à $\frac{1}{2}$. Dans cette phase, l'arête (p, p') est repérée pour chaque bande $R_{ii'}$ et la procédure qui suit est appelée.

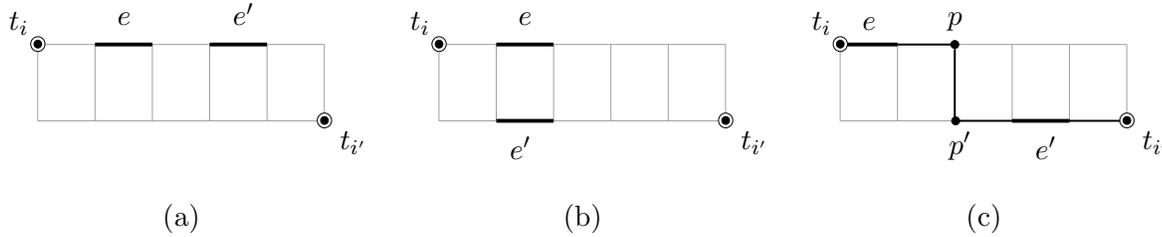


FIG. 9.1 – Procédure ArrondirBande

Procédure ArrondirBande($R_{ii'}$). Si $R_{ii'}$ est une bande dégénérée alors arrondir à 1 les arêtes du segment $[t_i, t_{i'}]$. Si $R_{ii'}$ n'est pas dégénérée alors arrondir à 1 les arêtes du segment $[t_i, p]$, du segment $[p', t_{i'}]$, et l'arête (p, p') . Le ℓ_1 -chemin entre t_i et $t_{i'}$ composé des arêtes qui ont été arrondies est noté $P_{ii'}$.

Phase 2. Les propriétés suivantes sont utilisées dans cette phase pour satisfaire les paires de chaque escalier $\mathcal{S}_{ij|i'j'}$. Soit ϕ le point le plus proche de t_i appartenant aux ℓ_1 -chemins $P_{ii'}$ et $P_{jj'}$ (ce point est un des sommets du rectangle formé par l'intersection de $R_{ii'}$ et $R_{jj'}$). Soit $P_{ii'}^+$ la partie du chemin $P_{ii'}$ allant de t_i à ϕ et $P_{jj'}^+$ la partie du chemin $P_{jj'}$ allant de t_j à ϕ (Fig. 9.2). La région rectilinéaire délimitée par $P_{ii'}^+$, $P_{jj'}^+$ et M_{ij} est appelée *escalier étendu* et elle est notée $\mathcal{S}_{ij|i'j'}^+$ (par définition nous considérons que les chemins $P_{ii'}^+$ et $P_{jj'}^+$ n'appartiennent pas à cette région contrairement à M_{ij}). Dans cet escalier étendu, les ℓ_1 -chemins qui vont d'un terminal $t_k \in T_{ij}$ à $t_{i'}$ (ou $t_{j'}$) sont de deux types : il y a ceux qui intersectent d'abord $P_{ii'}^+$ et ceux qui intersectent d'abord $P_{jj'}^+$. Sachant que le flot fractionnaire $f^{ki'}$ (ou $f^{kj'}$) peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de flots sur ces différents chemins, et que la valeur de ce flot qui arrive jusqu'à $P_{ii'}^+ \cup P_{jj'}^+$ est égale à 1, nous déduisons qu'au moins une des assertions suivantes est vérifiée : (i) la valeur du flot $f^{ki'}$ qui arrive sur $P_{ii'}^+$ est supérieure à $\frac{1}{2}$; (ii) la valeur du flot $f^{kj'}$ qui arrive sur $P_{jj'}^+$ est supérieure à $\frac{1}{2}$. La procédure qui suit, appelée sur chaque escalier $\mathcal{S}_{ij|i'j'}$ au cours de cette deuxième phase, s'appuie sur cette remarque pour arrondir un ensemble d'arêtes permettant de connecter les terminaux de T_{ij} à ϕ par des ℓ_1 -chemins.

Procédure ArrondirEscalier($\mathcal{S}_{ij|i'j'}$). Trouver le terminal $t_m \in T_{ij}$ situé le plus bas tel que le $f^{mi'}$ -flot arrivant sur $P_{ii'}^+$ soit supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$ (par symétrie, sans perte de généralité, nous pouvons supposer que ce terminal existe). Soit t_s le terminal de T_{ij} situé juste en dessous de t_m (ce terminal peut ne pas exister). D'après le choix de t_m , le $f^{si'}$ -flot arrivant sur $P_{jj'}^+$ est également supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$. Soit ϕ' l'intersection du chemin $P_{ii'}^+$ avec la droite horizontale passant par t_m et soit ϕ'' l'intersection du chemin $P_{jj'}^+$ avec la droite verticale passant par t_s . Arrondir à 1 toutes les arêtes des segments $[t_m, \phi']$ et $[t_s, \phi'']$ qui n'ont pas déjà été arrondies par

9.1.2 Analyse

Lemme 9.1.2 *Le réseau N^* a une taille inférieure ou égale au double du coût de la solution optimale fractionnaire.*

Preuve. Il faut établir l'inégalité suivante :

$$\text{coût}(\mathbf{x}^*) = \sum_{e \in E} l_e x_e^* \leq 2 \sum_{e \in E} l_e x_e = 2 \cdot \text{coût}(\mathbf{x}).$$

Pour cela, chaque arête $e \in E_1 \cup E_2$ est associée à un ensemble E_e d'arêtes parallèles à e tel que les points suivants soient vérifiés :

- (i) $\sum_{e' \in E_e} x_{e'} \geq \frac{1}{2}$;
- (ii) $E_e \cap E_f = \emptyset$ pour toute paire d'arêtes $e, f \in E_1 \cup E_2$.

Les arêtes de E_e *payent* pour l'inclusion de l'arête e dans le réseau N^* . Il est suffisant d'établir ces deux points car, pour toute arête e' appartenant E_0 , nous avons $x_{e'} = 1$ d'après le Corollaire 6.3.1. En effet, pour ces arêtes, la moitié de la variable $x_{e'}$ paye pour l'arête e' et l'autre moitié est recyclée pour payer éventuellement une arête appartenant à $E_1 \cup E_2$ (cette moitié est utilisée pour payer les arêtes de passage dont la variable n'est pas supérieure à $\frac{1}{2}$).

Dans un premier temps, considérons une arête $e \in E_1$ qui a été arrondie afin de construire le chemin $P_{ii'}$ de la bande $R_{ii'}$. Si cette arête a une valeur supérieure à $\frac{1}{2}$ alors elle est associée à elle-même ($E_e := \{e\}$). Cela est toujours le cas si $R_{ii'}$ est une bande dégénérée ou si e appartient à $[t_i, p]$ ou $[t_{i'}, p']$. Si e n'a pas une valeur supérieure à $\frac{1}{2}$, alors il s'agit de l'arête de passage du chemin $P_{ii'}$. Dans ce cas e est associée à l'une des deux arêtes de la frontière auxquelles elle est parallèle. Pour les arêtes de l'ensemble E_1 la condition (i) est donc vérifiée car les arêtes de la frontière ont pour valeur 1. La condition (ii) est également vérifiée pour les arêtes de cet ensemble car, d'après la définition des bandes, une arête de la frontière ne peut être parallèle qu'aux arêtes de passage d'une seule bande.

Considérons maintenant deux arêtes $e, f \in E_2$ qui ont été arrondies lors du traitement d'un escalier étendu $\mathcal{S}_{ij|i'j'}^+$ et tel que $e \in [t_m, \phi']$ et $f \in [t_s, \phi'']$. L'ensemble E_e est constitué de e et des arêtes de l'escalier étendu qui sont parallèles à e et qui sont localisées en dessous de e (sur la Figure 9.2, E_e est représenté par un segment vertical qui passe par les arêtes qui le constituent). Le choix de t_m et le fait que la totalité du flot $f^{mi'}$ qui arrive sur $P_{ii'}^+$ traverse E_e implique que $\sum_{e' \in E_e} x_{e'} \geq \frac{1}{2}$ et donc que la condition (i) est vérifiée. De la même manière, E_f est constitué de f et des arêtes de l'escalier étendu qui sont parallèles à f et qui sont localisées à gauche de f . Le choix de t_s assure également que la condition (i) est vérifiée pour f . D'après cette description, il est évident que les ensembles E_e et E_f ne s'intersectent pas. Comme ces ensembles appartiennent à la région de $\mathcal{S}_{ij|i'j'}^+$ délimitée par les segments $[t_m, \phi']$ et $[t_s, \phi'']$, et que les autres appels récursifs sur cet escalier concernent des régions disjointes, nous déduisons que E_f et E_e n'intersectent pas l'ensemble $E_{e'}$ d'une arête e' arrondie lors d'un appel récursif différent concernant l'escalier $\mathcal{S}_{ij|i'j'}^+$. La condition (ii) est donc vérifiée pour les arêtes de E_2 arrondies lors du traitement d'un même escalier.

Considérons à présent deux arêtes différentes e et e' appartenant à E_2 tel que e a été arrondie lors du traitement d'un escalier $\mathcal{S}_{ij|i'j'}^+$ et e' lors du traitement d'un escalier $\mathcal{S}_{kl|k'l'}^+$. Afin de montrer que $E_{e'} \cap E_e = \emptyset$, supposons par contradiction que ce n'est pas le cas. L'ensemble E_e est constitué de e et d'arêtes appartenant à l'intérieur de $\mathcal{S}_{ij|i'j'}^+$. De même, l'ensemble $E_{e'}$ est constitué de e' et d'arêtes appartenant à l'intérieur de $\mathcal{S}_{kl|k'l'}^+$. Par conséquent, comme deux escaliers

s'intersectent uniquement sur leur frontière, nous déduisons que $e = e'$ pour que les ensembles E_e et $E_{e'}$ s'intersectent. Cela contredit l'hypothèse que e et e' sont des arêtes différentes. Les conditions (i) et (ii) sont donc vérifiées pour toutes les arêtes de E_2 .

Pour terminer, pour tout $e_1 \in E_1$ et $e_2 \in E_2$, nous savons que $E_{e_1} \cap E_{e_2} = \emptyset$ car E_{e_1} est une arête appartenant à une bande ou à la frontière de l'enveloppe de Pareto, et qu'un escalier n'est traversé par aucune bande. Par conséquent, les conditions (i) et (ii) sont vérifiées pour les arêtes de l'ensemble $E_1 \cup E_2$. \square

D'après le Lemme 9.1.1, le réseau construit par l'algorithme `ManhattanArrondi2` est un réseau de Manhattan. D'après le Lemme 9.1.2, ce réseau a une taille inférieure à $2 \cdot |N_{\text{opt}}|$. Nous déduisons, de ces deux lemmes, le résultat principal de cette section.

Théorème 9.1.1 *L'algorithme `ManhattanArrondi2` est un algorithme d'approximation de facteur 2 pour le problème du réseau de Manhattan minimal.*

9.2 Un algorithme primal-dual de facteur 3

Cette section présente un algorithme d'approximation avec un facteur 3 en temps $O(n \log n)$ pour le problème du réseau de Manhattan minimal. Pour justifier le facteur d'approximation de cet algorithme combinatoire, appelé `ManhattanPrimalDual3`, nous utiliserons la méthode primale-duale introduite dans la Section 8.5.

9.2.1 L'algorithme `ManhattanPrimalDual3`

L'algorithme `ManhattanPrimalDual3` se déroule en deux phases. Dans la première phase, un réseau N_1 qui satisfait les paires de l'ensemble F_{band} est construit. Dans la deuxième phase, le réseau N_1 est complété par un réseau N_2 afin de satisfaire les paires de l'ensemble F_{esc} . Voici le détail de ces deux phases.

Phase 1. Elle consiste à localiser les bandes et à exécuter la procédure `BandePrimalDual3` sur chaque bande R_{ij} . Nous montrerons ci-dessous que le réseau N_1 construit dans cette phase permet de satisfaire les paires de l'ensemble F_{band} (Fig. 9.3.(c)).

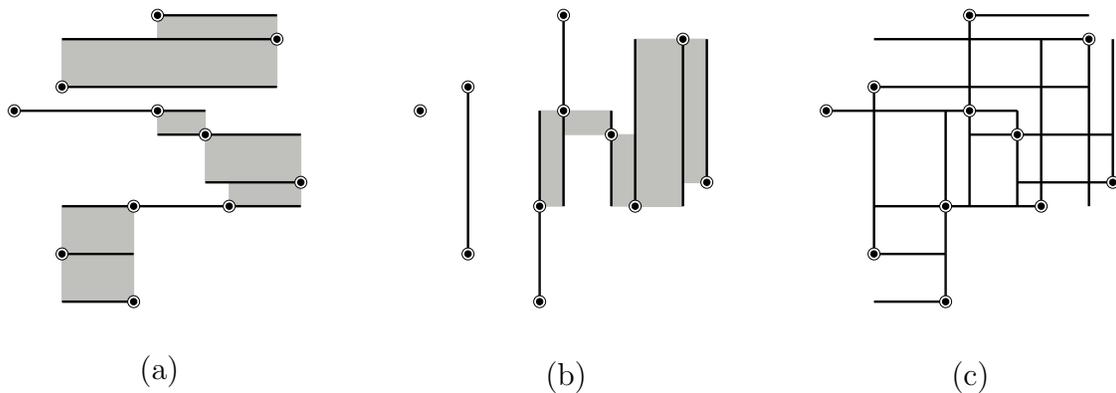


FIG. 9.3 – Réseau construit par la procédure `BandePrimalDual3`

Procédure `BandePrimalDual3`($R_{ii'}$). Ajouter au réseau N_1 les côtés horizontaux de $R_{ii'}$ si c'est une bande horizontale (Fig. 9.3.(a)), ou ses côtés verticaux si c'est une bande verticale (Fig. 9.3.(b)).

Phase 2. A l'issue de la première phase, pour chaque escalier $\mathcal{S}_{ij|i'j'}$, nous remarquons que les segments $[\alpha, o]$ et $[\beta, o]$ appartiennent au réseau N_1 (Fig. 9.4). La procédure qui suit, appelée sur chaque escalier $\mathcal{S}_{ij|i'j'}$ au cours de la deuxième phase, s'appuie sur cette remarque pour connecter les terminaux de T_{ij} à o par des ℓ_1 -chemins.

Procédure `EscalierPrimalDual2`($\mathcal{S}_{ij|i'j'}$). Trouver le terminal $t_m \in T_{ij}$ situé le plus bas tel que $|t_m^x - o^x| \leq |t_m^y - o^y|$ (par symétrie, sans perte de généralité, nous pouvons supposer que ce terminal existe). Soit t_s le terminal de T_{ij} situé juste en dessous de t_m (si ce terminal existe nous avons $|t_s^x - o^x| > |t_s^y - o^y|$). Le point d'intersection de la droite horizontale passant par t_m et de la droite verticale passant par t_i est noté ϕ' . De même, le point d'intersection de la droite verticale passant par t_s et de la droite horizontale passant par t_j est noté ϕ'' (Fig. 9.4). Ajouter le segment $[t_m, \phi']$ et le segment $[t_s, \phi'']$ (si t_s existe) au réseau N_2 afin de connecter t_m et t_s à l'origine o . Si certains des terminaux de T_{ij} sont situés au dessus de t_m , alors rappeler récursivement la procédure `EscalierPrimalDual2` sur l'escalier partiel borné par $[\alpha, \phi']$, $[t_m, \phi']$, et la partie du chemin M_{ij} située entre α et t_m (cet appel permet de connecter les terminaux situés au dessus de t_m à o par des ℓ_1 -chemins qui passent par ϕ'). De la même manière, si t_s existe et qu'il existe des terminaux de T_{ij} situés à droite de t_s , alors rappeler récursivement la procédure `EscalierPrimalDual2` sur l'escalier partiel borné par $[\beta, \phi'']$, $[t_s, \phi'']$, et la partie de M_{ij} située entre t_s et β .

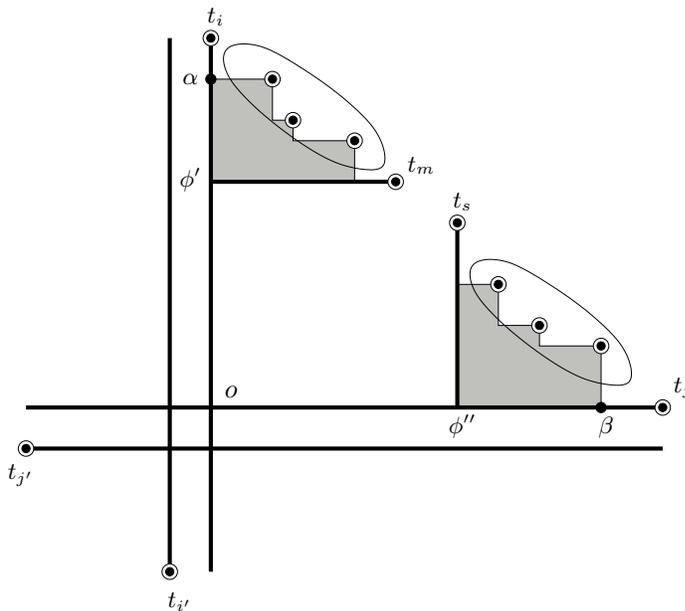


FIG. 9.4 – La procédure `EscalierPrimalDual2`

Nous allons maintenant analyser la complexité de cette procédure. Considérons un escalier $\mathcal{S}_{ij|i'j'}$ où T_{ij} contient k terminaux. Notons que lorsque nous parcourons l'ensemble des terminaux de haut en bas, le rapport $\frac{|t^x - o^x|}{|t^y - o^y|}$ croît de façon monotone. De plus, t_m est le terminal le plus bas dont le rapport est inférieur ou égal à un. Par conséquent, si les terminaux de T_{ij} sont triés dans l'ordre décroissant des ordonnées à l'entrée de la procédure `EscalierPrimalDual2`,

nous pouvons effectuer la recherche de t_m de façon dichotomique en temps $O(\log k)$.

Lemme 9.2.1 *La complexité en temps de l'algorithme `ManhattanPrimalDual3` est $O(n \log n)$.*

Preuve. D'après les lemmes 7.3.1 et 7.4.1, la localisation des bandes et des escaliers s'effectue en temps $O(n \log n)$. Ensuite, la construction du réseau N_1 s'effectue en temps $O(n)$ car le nombre de bandes est linéaire. En utilisant la recherche dichotomique pour identifier t_m , la procédure `EscalierPrimalDual2` s'exécute en temps $O(k \log k)$ sur un escalier de taille k car un nouveau terminal est connecté à o avant chaque appel récursif. Chaque sommet apparaissant dans au maximum quatre escaliers, la somme des tailles des escaliers est linéaire. Par conséquent, la construction du réseau N_2 s'effectue en temps $O(n \log n)$. \square

Lemme 9.2.2 *Le réseau $N := N_1 \cup N_2$ est un réseau de Manhattan.*

Preuve. Dans la deuxième phase, la procédure `EscalierPrimalDual2`($\mathcal{S}_{ij|i'j'}$) permet de connecter les terminaux de T_{ij} à o . Par ailleurs, les côtés verticaux de $R_{ii'}$ et horizontaux de $R_{jj'}$ permettent de connecter par un ℓ_1 -chemin o et $t_{i'}$, et o et $t_{j'}$. Nous en déduisons que N satisfait les paires formant l'escalier $\mathcal{S}_{ij|i'j'}$ grâce à des ℓ_1 -chemins passant par o . Il reste donc à montrer que N_1 satisfait l'ensemble F_{band} . Pour cela, sans perte de généralité, considérons une bande horizontale $R_{jj'}$ tel que $t_j \in \mathcal{Q}_1(t_{j'})$, et montrons que N_1 la satisfait. Soit t_i et $t_{i'}$ tel que $t_i = A_1(t_{j'})$ et $t_{i'} = A_3(t_i)$. Ainsi défini, $R_{ii'}$ est une bande verticale qui forme, comme sur la Figure 9.4, une configuration croisée avec $R_{jj'}$. Comme les côtés horizontaux de $R_{jj'}$ et verticaux de $R_{ii'}$ appartiennent à N_1 , nous déduisons que N_1 satisfait la paire $(t_j, t_{j'})$. Le réseau N est donc un réseau de Manhattan car il satisfait les paires de l'ensemble générateur $F_{\text{band}} \cup F_{\text{esc}}$. \square

9.2.2 Analyse

Dans cette analyse, nous allons supposer que les terminaux sont des sommets d'une grille uniforme dont toutes les arêtes ont une longueur unitaire. Pour passer d'une grille de Hanan quelconque à une grille unitaire, il suffit de diviser la grille de Hanan engendrée par T en une grille plus fine dont toutes les arêtes ont la même longueur, et de multiplier ensuite toutes ces longueurs par un facteur constant de manière à obtenir des longueurs unitaires. Notons que cette transformation permet uniquement de simplifier la description de l'analyse du facteur d'approximation. La même description peut être effectuée dans la grille de Hanan initiale.

Afin de montrer que $|N| \leq 3 \cdot |N_{\text{opt}}|$, nous allons exhiber une solution duale \mathbf{y} du programme linéaire (4) dont le coût est égal à $\frac{1}{3} \cdot |N|$. Pour obtenir cette solution, une coupe dont la valeur sera précisée plus bas est associée à chaque arête de la grille unitaire appartenant aux réseaux N_1 et N_2 .

Coupes associées aux arêtes du réseau N_1 . Soit e une arête appartenant à un segment du réseau N_1 . Si e appartient à l'un des côtés horizontaux d'une bande horizontale $R_{jj'}$, alors la $(t_j, t_{j'})$ -coupe verticale qui la contient lui est associée. Si e appartient à l'un des côtés verticaux d'une bande verticale $R_{ii'}$, alors la $(t_i, t_{i'})$ -coupe horizontale qui la contient lui est associée. L'ensemble des coupes associées aux arêtes du réseau N_1 est noté \mathcal{C}_1 .

Sur la Figure 9.5, nous avons représenté les arêtes horizontales du réseau N_1 et les coupes verticales associées à chacune d'elles. Sur cette figure, un rectangle marque l'intersection entre une coupe et l'arête à laquelle elle est associée. Avant de décrire les coupes associées au réseau N_2 , nous établissons les caractéristiques des coupes de l'ensemble \mathcal{C}_1 .

Lemme 9.2.3 *Les coupes de l'ensemble \mathcal{C}_1 vérifient les assertions suivantes :*

- (a) *une coupe associée à une arête d'une bande \mathcal{B} passe uniquement par des arêtes de \mathcal{B} ;*
- (b) *une coupe est associée à au plus deux arêtes ;*
- (c) *au plus deux coupes passent par la même arête ;*
- (d) *au plus une coupe passe par la frontière d'un escalier.*

Preuve. L'assertion (a) est triviale. L'assertion (b) est une conséquence du fait qu'une coupe passe uniquement par deux arêtes appartenant à la frontière de la bande dont elle est la coupe. Le fait qu'une arête appartienne à au plus deux bandes horizontales (resp. verticales) implique l'assertion (c), et le fait que les arêtes appartenant à la frontière d'un escalier appartiennent à au plus une bande horizontale (resp. verticale) implique l'assertion (d). \square

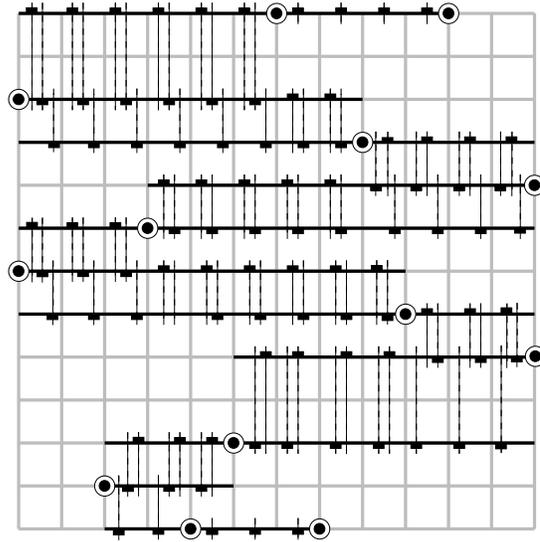


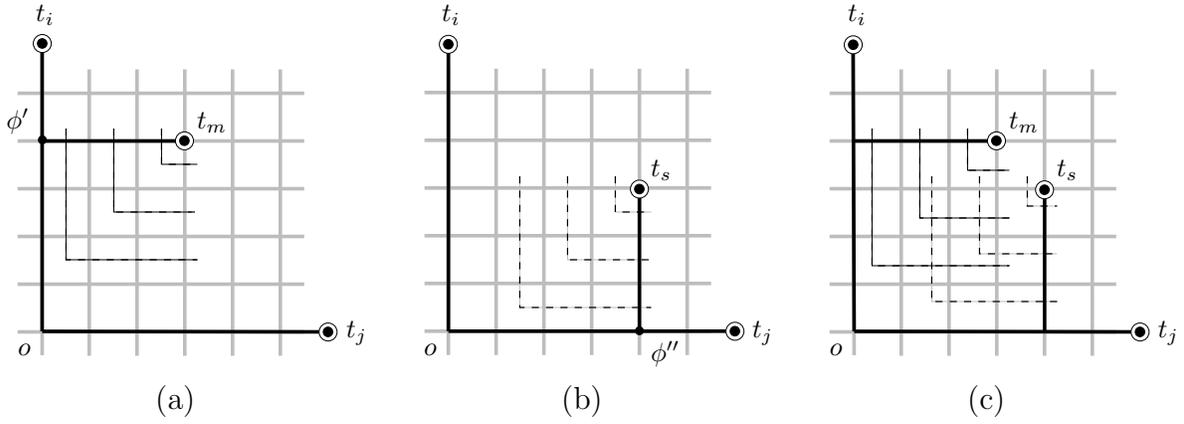
FIG. 9.5 – Les coupes associées aux arêtes horizontales de N_1

Coupes associées aux arêtes du réseau N_2 . Soit e une arête appartenant à un segment du réseau N_2 qui a été ajouté pour traiter un escalier $\mathcal{S}_{ij|i'j'}$ ou un escalier partiel défini à partir de $\mathcal{S}_{ij|i'j'}$. Si e appartient au segment $[t_m, \phi']$, nous notons e' l'arête verticale alignée avec t_m tel que la distance de t_m à e soit égale à la distance de t_m à e' , et nous associons à e la $(t_m, t_{i'})$ -coupe en L qui passe par e et e' (Fig. 9.6.(a)). Comme le montre le Lemme 9.2.4, le critère de choix de t_m assure que les arêtes de ces coupes L se situent à l'intérieur de l'escalier $\mathcal{S}_{ij|i'j'}$. Si e appartient au segment $[t_s, \phi'']$, nous notons e' l'arête horizontale alignée avec t_s tel que la distance de t_s à e soit égale à la distance de t_s à e' , et nous associons à e la $(t_s, t_{i'})$ -coupe en L qui passe par e et e' (Fig. 9.6.(b)). L'ensemble des coupes associées aux arêtes du réseau N_2 est noté \mathcal{C}_2 .

A présent, nous allons établir les propriétés des coupes de l'ensemble \mathcal{C}_2 . Sur la Figure 9.7, nous avons représenté les coupes de cet ensemble associées aux segments d'un escalier.

Lemme 9.2.4 *Les coupes de l'ensemble \mathcal{C}_2 vérifient les assertions suivantes :*

- (a) *une coupe associée à une arête d'un escalier \mathcal{S} passe uniquement par des arêtes de \mathcal{S} ;*


 FIG. 9.6 – Les coupes associées aux segments de la procédure `EscalierPrimalDual2`

- (b) au plus deux coupes associées aux arêtes d'un escalier \mathcal{S} passent par la même arête ;
- (c) une coupe est associée à une seule arête ;
- (d) les coupes associées aux arêtes d'un escalier \mathcal{S} ne s'intersectent pas sur la frontière de \mathcal{S} .

Preuve. L'assertion (a) est une conséquence du fait que l'algorithme ajoute les segments $[t_m, \phi']$ et $[t_s, \phi'']$ si $|t_m^x - o^x| \leq |t_m^y - o^y|$ et $|t_s^x - o^x| > |t_s^y - o^y|$. L'assertion (b) est une conséquence des deux points suivants :

- (i) les coupes associées aux arêtes du segment $[t_m, \phi']$ (resp. $[t_s, \phi'']$) ne s'intersectent pas ;
- (ii) les coupes associées aux arêtes des segments $[t_m, \phi']$ et $[t_s, \phi'']$ n'intersectent pas les coupes associées aux arêtes de segments ajoutés lors de l'un des deux appels récursifs de la procédure `EscalierPrimalDual2`, car ces appels concernent des régions différentes.

Le fait que les terminaux de T_{ij} ne sont pas alignés verticalement ou horizontalement implique les deux dernières assertions. \square

Théorème 9.2.1 *L'algorithme `ManhattanPrimalDual3` est un algorithme d'approximation de facteur 3 en temps $O(n \log n)$ pour le problème du réseau de Manhattan minimal.*

Preuve. D'après le Lemme 9.2.1 et le Lemme 9.2.2, il reste seulement à montrer le facteur d'approximation de l'algorithme. Pour cela, nous définissons une solution duale \mathbf{y} tel que $y_C := k \cdot \frac{1}{3}$ si C est une coupe de $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ associée à k arêtes de la grille unitaire, et tel que $y_C := 0$ si C n'appartient pas à $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$. Ainsi défini, le coût de \mathbf{y} est égal à $\frac{1}{3} \cdot |N_1 \cup N_2|$. Pour établir le théorème, il suffit de montrer que \mathbf{y} est une solution admissible du programme linéaire dual, *i.e.*, pour toute arête e de la grille :

$$\sum_{C \in \mathcal{C}: e \in C} y_C \leq 1.$$

D'après les valeurs données aux coupes, cela équivaut à montrer que le nombre d'arêtes associées aux coupes passant par une arête e est inférieur ou égal à 3. Supposons, sans perte de généralité, que e est une arête horizontale. Remarquons que les seules coupes qui peuvent contenir l'arête e

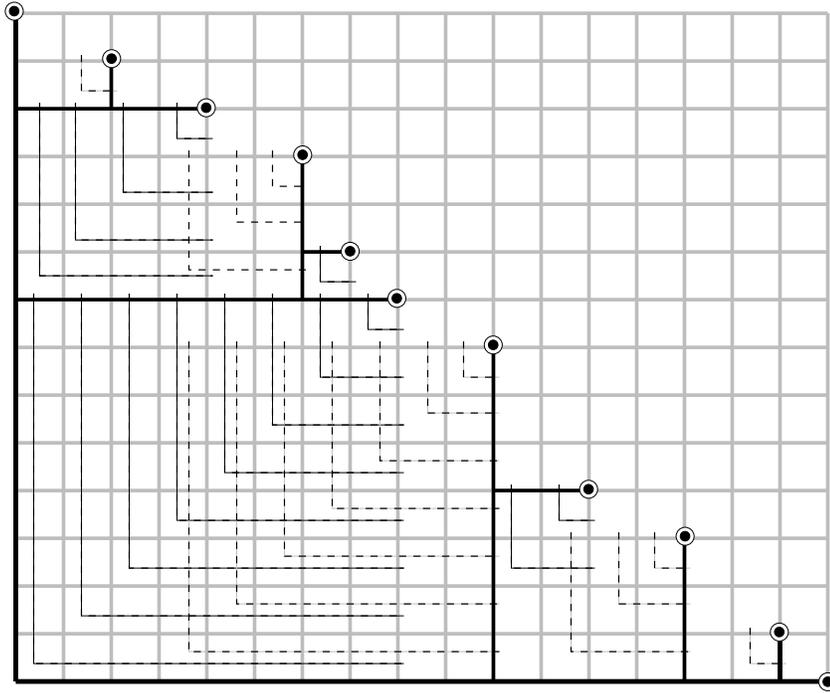


FIG. 9.7 – Ensemble de coupes associées aux arêtes d’un escalier

sont des coupes verticales de bandes horizontales ou des coupes en L définies à partir d’escaliers. Les bandes horizontales et les escaliers s’intersectent uniquement sur leur frontière, il suffit de considérer les 5 cas suivants : (1) e appartient à la frontière de deux bandes horizontales, (2) e appartient à la frontière de deux escaliers, (3) e appartient à la frontière d’un escalier et d’une bande horizontale, (4) e appartient uniquement à un escalier, ou (5) e appartient uniquement à une bande horizontale.

1. L’arête e appartient à la frontière de deux bandes horizontales \mathcal{B} et \mathcal{B}' . Dans ce cas, d’après l’assertion (a) du Lemme 9.2.3 et l’assertion (a) du Lemme 9.2.4, seulement une coupe de $\mathcal{C} \in \mathcal{C}_1$ associée à des arêtes de la frontière de \mathcal{B} et une coupe de $\mathcal{C}' \in \mathcal{C}_1$ associée à des arêtes de la frontière de \mathcal{B}' peuvent contenir e . A elles deux, \mathcal{C} et \mathcal{C}' peuvent être associées à au plus trois arêtes : à l’arête jumelle de e appartenant à la frontière de \mathcal{B} , à l’arête jumelle de e appartenant à la frontière de \mathcal{B}' et à e . Nous déduisons que la contrainte duale concernant e est vérifiée.
2. L’arête e appartient à la frontière de deux escaliers \mathcal{S} et \mathcal{S}' . Dans ce cas, l’assertion (a) du Lemme 9.2.3 implique qu’aucune coupe de \mathcal{C}_1 ne passe par e . Comme les escaliers s’intersectent uniquement sur leur frontière, les assertions (a) et (d) du Lemme 9.2.4 impliquent qu’au maximum une coupe de \mathcal{C}_2 associée à une arête de \mathcal{S} et une coupe de \mathcal{C}_2 associée à une arête de \mathcal{S}' peuvent contenir e . D’après l’assertion (c) du Lemme 9.2.4, une coupe de \mathcal{C}_2 est associée à une seule arête, par conséquent la contrainte duale concernant e est vérifiée.
3. L’arête e appartient à la frontière d’un escalier \mathcal{S} et à la frontière d’une bande horizontale \mathcal{B} . Dans ce cas, les assertions (a) et (d) du Lemme 9.2.4 impliquent qu’au maximum une coupe de \mathcal{C}_2 associée à une arête de \mathcal{S} peut contenir e , et l’assertion (d) du Lemme 9.2.3 implique

qu'au maximum une coupe de l'ensemble \mathcal{C}_1 peut contenir e . D'après l'assertion (c) du Lemme 9.2.4, une coupe de \mathcal{C}_2 est associée à une seule arête, et d'après l'assertion (b) du Lemme 9.2.3 une coupe de \mathcal{C}_1 est associée à au plus deux arêtes, par conséquent la contrainte duale concernant e est vérifiée.

4. L'arête e appartient à un seul escalier \mathcal{S} . Dans ce cas, l'assertion (a) du Lemme 9.2.3 implique qu'aucune coupe de \mathcal{C}_1 ne passe par e . L'assertion (b) du Lemme 9.2.4 implique qu'au maximum deux coupes de \mathcal{C}_2 associées à des arêtes de \mathcal{S} passent par e . D'après l'assertion (c) du Lemme 9.2.4, une coupe de \mathcal{C}_2 est associée à une seule arête, par conséquent la contrainte duale concernant e est vérifiée.
5. L'arête e appartient à une seule bande horizontale \mathcal{B} . Dans ce cas, d'après l'assertion (a) du Lemme 9.2.3 et l'assertion (a) du Lemme 9.2.4, nous déduisons qu'au plus une coupe de \mathcal{C}_1 peut contenir e . D'après l'assertion (b) du Lemme 9.2.3, une coupe de \mathcal{C}_1 est associée à au plus deux arêtes, par conséquent la contrainte duale concernant e est vérifiée.

□

Remarque 9.2.1 D'après la description de la solution duale que nous venons de faire, nous pouvons noter que l'algorithme `EscalierPrimalDual2` est un algorithme d'approximation de facteur 2 pour le problème qui consiste à construire le plus petit réseau qui satisfait les paires (t_k, o) pour tout t_k appartenant à T_{ij} (d'où le nom `EscalierPrimalDual2`).

L'exemple qui suit montre que nous ne pouvons pas garantir un meilleur facteur d'approximation pour l'algorithme `ManhattanPrimalDual3`.

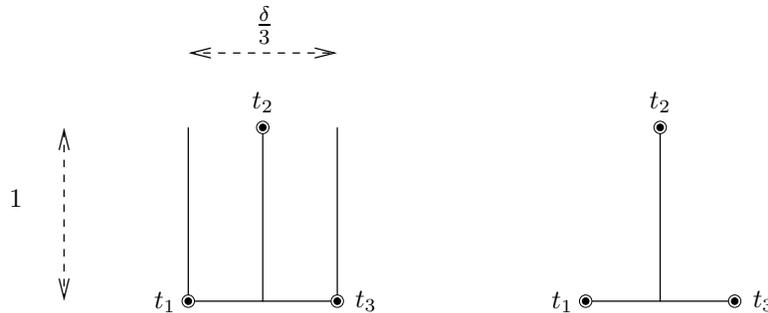


FIG. 9.8 – Instance serrée pour l'algorithme `ManhattanPrimalDual3`

Exemple 9.2.1 (Instance serrée `ManhattanPrimalDual3`) *Il existe des ensembles de terminaux pour lesquels $3 \cdot |N_{opt}| - \delta \leq |N_1 \cup N_2| \leq 3 \cdot |N_{opt}|$ pour tout $\delta > 0$.*

Preuve. Considérons les trois terminaux disposés comme sur la Figure 9.8. A gauche nous avons représenté le réseau $N_1 \cup N_2$ construit par l'algorithme et à droite le réseau optimal N_{opt} . Pour cet exemple, $R_{1,2}$ et $R_{2,3}$ sont des bandes verticales, $R_{1,3}$ est une bande horizontale, et il n'existe pas d'escalier. Comme $|N_{opt}| = 1 + \frac{\delta}{3}$ et $|N_1 \cup N_2| = 3 + \frac{\delta}{3}$, nous avons $3 \cdot |N_{opt}| - \delta \leq |N_1 \cup N_2|$ pour tout $\delta > 0$. □

9.3 Un algorithme primal-dual de facteur 2

Cette section présente un algorithme d'approximation avec un facteur 2 en temps $O(n \log n)$ pour le problème du réseau de Manhattan minimal. Cet algorithme est une amélioration de l'algorithme `ManhattanPrimalDual13`. Pour justifier son facteur d'approximation, nous utilisons également la méthode primale-duale.

9.3.1 L'algorithme `ManhattanPrimalDual2`

L'algorithme `ManhattanPrimalDual2` se déroule en trois phases. Dans la première phase, un réseau N_1 qui satisfait les paires de l'ensemble F_{band} est construit. Ce réseau est composé d'un réseau N_1^H qui satisfait les bandes horizontales et d'un réseau N_1^V qui satisfait les bandes verticales. Dans la deuxième phase, afin de préparer la troisième phase, un réseau N_2 composé de segments appartenant à la base de certains escaliers est construit. Dans la troisième phase, un réseau N_3 vient compléter le réseau $N_1 \cup N_2$ pour satisfaire les paires de l'ensemble F_{esc} . Voici le détail de ces trois phases.

Phase 1. Les algorithmes de construction des réseaux N_1^H et N_1^V sont identiques à l'orientation près. Pour cette raison, nous décrivons seulement celui permettant de construire le réseau N_1^H . Dans un premier temps, les bandes horizontales sont triées de haut en bas puis considérées l'une après l'autre dans cet ordre. A chaque étape, un ℓ_1 -chemin permettant de satisfaire la bande *courante* est construit. La construction de ce ℓ_1 -chemin obéit aux règles suivantes. Premièrement, celui-ci est construit à l'intérieur de l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_{d_1}(T)$. De plus, il utilise en priorité le chemin de la bande précédente puis, afin de participer au mieux à la construction de la bande suivante, il utilise au maximum le côté le plus bas de la bande courante. Pour construire le ℓ_1 -chemin à l'intérieur de l'enveloppe de Pareto, la représentation par bandes et par paliers décrite dans la Section 3.2 est utilisée. Voici la procédure appelée sur chaque bande horizontale $R_{ii'}$ pour construire le ℓ_1 -chemin qui la satisfait.

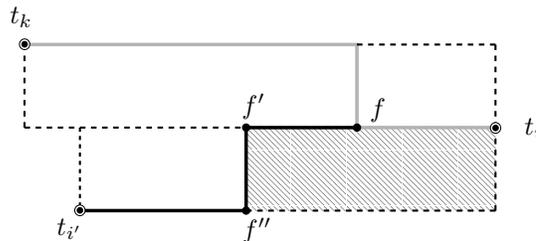


FIG. 9.9 – Illustration de la procédure `BandePrimaleDuale1`

Procédure `BandePrimaleDuale1`($R_{ii'}$). Si $R_{ii'}$ est une bande dégénérée, ajouter le segment $[t_i, t_{i'}]$ au réseau N_1^H . Sinon, sans perte de généralité, supposons que t_i est au dessus et à droite de $t_{i'}$ (Fig. 9.9). Soit $[t_i, f]$ l'intersection de $R_{ii'}$ avec le ℓ_1 -chemin permettant de satisfaire la bande précédente R_{ki} (par construction, t_i est nécessairement une extrémité de ce segment). Soit $[f', f'']$ l'arête de passage de la bande $R_{ii'}$ qui est la plus à droite, qui appartient à $R(f, t_{i'})$, et qui appartient à l'enveloppe de Pareto. Sur la Figure 9.9, nous avons représenté en hachuré la partie extérieure de l'enveloppe de Pareto intersectant la bande. Ajouter les segments $[f, f']$, $[f', f'']$ et $[f'', t_{i'}]$ au réseau N_1^H . Par la suite, le ℓ_1 -chemin connectant les terminaux de la bande $R_{ii'}$ est noté $P_{ii'}$.

Sur l'exemple de la Figure 9.10, les segments du réseau N_1^H sont représentés en gris s'ils sont ajoutés pour traiter une bande ayant une position paire dans l'ordre de balayage, et en noir dans le cas contraire. Sur cette figure, la partie de la frontière de l'enveloppe de Pareto non recouverte par le réseau N_1^H est représentée en pointillés.

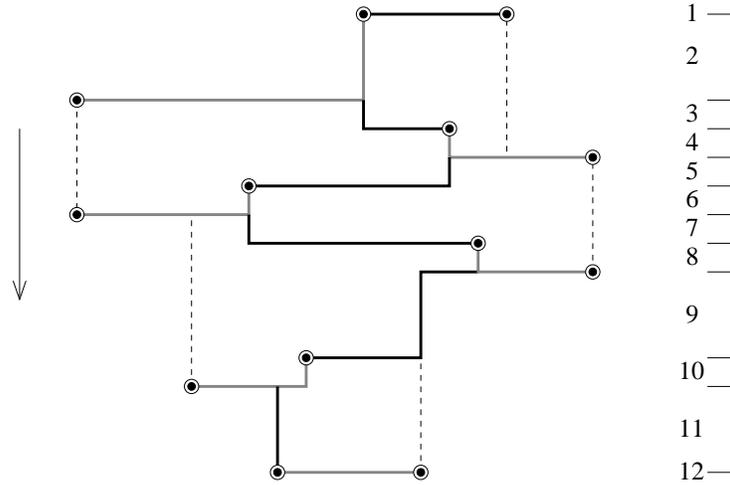


FIG. 9.10 – Le réseau N_1^H

Lemme 9.3.1 *La construction des réseaux N_1^H et N_1^V s'effectue en temps $O(n \log n)$.*

Preuve. La localisation des bandes, la construction de l'enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_{d_1}(T)$, et la construction de la représentation par bandes et par paliers de celle-ci s'effectue en temps $O(n \log n)$. Le tri de haut en bas des bandes horizontales et de gauche à droite des bandes verticales s'effectue également en temps $O(n \log n)$. Une fois ces pré-traitements réalisés, le balayage en lui-même s'effectue en temps $O(n)$. \square

Afin de décrire la deuxième phase, pour chaque escalier $S_{ij|i'j'}$, nous allons étudier la forme des chemins $P_{ii'}$ et $P_{jj'}$ construits dans la première phase. Pour cela, nous notons α' le point d'intersection de la droite horizontale passant par α et de la droite verticale passant par $t_{i'}$. De même, nous désignons par β' le point d'intersection de la droite verticale passant par β et de la droite horizontale passant par $t_{j'}$. Nous notons également o_1, o_2, o_3 et o_4 les sommets du rectangle formé par l'intersection des bandes $R_{ii'}$ et $R_{jj'}$ (Fig. 9.11). Nous dirons que le chemin $P_{ii'}$ tourne avant l'escalier $S_{ij|i'j'}$ s'il utilise l'arête de passage $[\alpha, \alpha']$ ou une arête de passage située au dessus de $[\alpha, \alpha']$. Nous dirons que ce chemin tourne après l'escalier $S_{ij|i'j'}$ s'il utilise l'arête de passage $[o_3, o_4]$ ou une arête de passage située en dessous de $[o_3, o_4]$. Symétriquement, nous dirons également que le chemin $P_{jj'}$ tourne avant ou après l'escalier $S_{ij|i'j'}$.

Nous montrerons par la suite que les chemins $P_{ii'}$ et $P_{jj'}$ tournent avant ou après l'escalier $S_{ij|i'j'}$. Dans la deuxième phase, l'algorithme réalise différents traitements en fonction de la forme de ces deux chemins. Les trois cas suivants sont distingués (Fig. 9.12) :

- (a) les deux chemins tournent avant l'escalier $S_{ij|i'j'}$;
- (b) l'un des chemins tourne avant l'escalier $S_{ij|i'j'}$ et l'autre tourne après ;
- (c) les deux chemins tournent après l'escalier $S_{ij|i'j'}$.

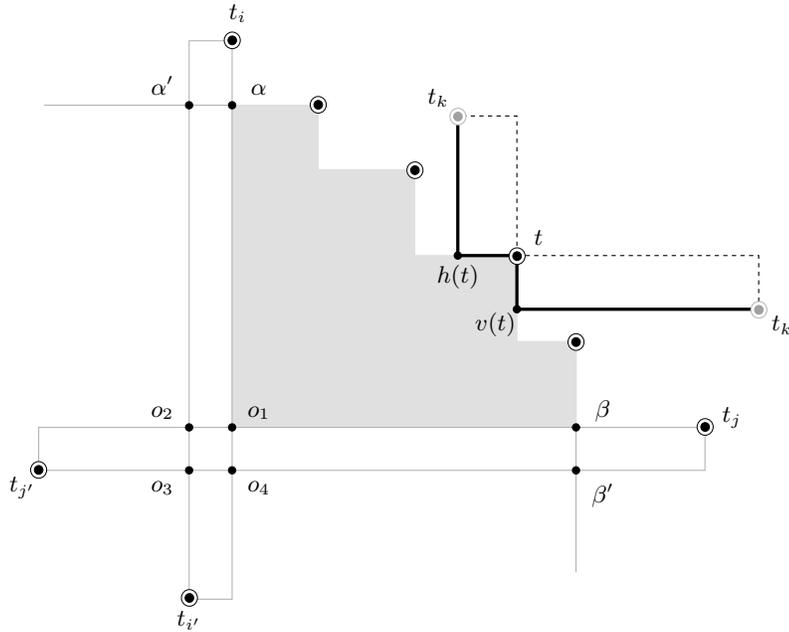


FIG. 9.11 – Illustration de l’algorithme ManhattanPrimalDual2

Dans la seconde phase, des traitements sont effectués afin de prendre en compte les interactions possibles entre les paires des escaliers et les paires des bandes qui les définissent.

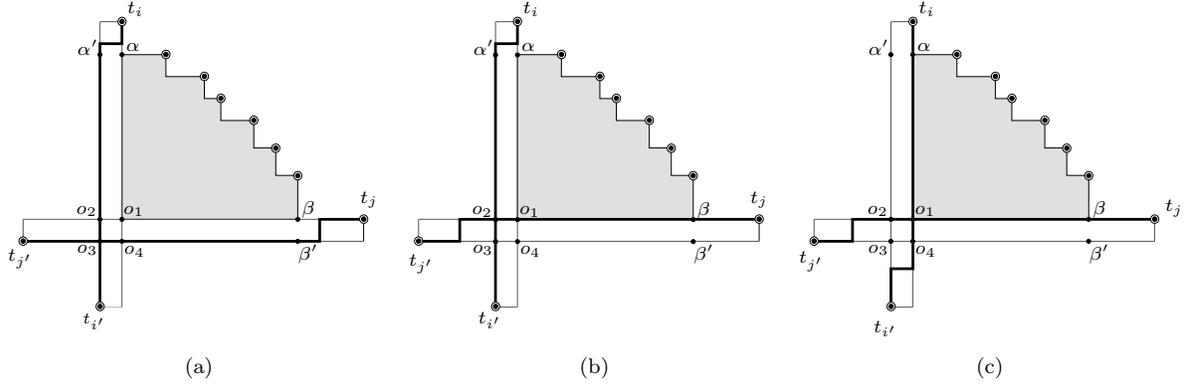
Lemme 9.3.2 *Le segment $[\alpha, o_4]$ appartient complètement à la frontière de l’enveloppe de Pareto ou pas du tout. De même pour les segments $[\alpha', o_3]$, $[\beta, o_2]$ et $[\beta', o_3]$.*

Preuve. Montrons cette propriété pour le segment $[\alpha, o_4]$. Supposons qu’une partie du segment $[\alpha, o_4]$ appartienne à la frontière de l’enveloppe de Pareto. D’après la définition de la frontière de l’enveloppe de Pareto d’un bloc indivisible, nous savons que ce morceau appartient à un ℓ_1 -chemin en forme de L qui délimite la frontière de l’enveloppe et qui satisfait une paire de terminaux. Comme la zone \mathcal{Q}_2^+ est vide (Fig. 7.6), nous déduisons que la totalité du segment $[\alpha, o_4]$ appartient nécessairement à ce chemin, et donc qu’il appartient complètement à la frontière de l’enveloppe de Pareto. \square

Phase 2. Elle consiste à appeler la procédure **BaseEscalier** sur chaque escalier $\mathcal{S}_{ij|i'j'}$ afin d’effectuer un traitement au niveau de sa base. La justification de cette procédure apparaîtra lors de l’analyse du facteur d’approximation de l’algorithme.

Procédure BaseEscalier($\mathcal{S}_{ij|i'j'}$). Dans le cas (c) aucun traitement n’est effectué. Dans les deux autres cas, un traitement est effectué si certains segments de $P_{ii'}$ ou $P_{jj'}$ n’appartiennent pas à la frontière de l’enveloppe de Pareto. Voici la description de ces traitements dans les deux cas :

- (a) Si le segment $[\alpha', o_3]$ n’appartient pas à la frontière de l’enveloppe de Pareto, alors ajouter le segment $[\alpha, o_4]$. Si le segment $[\beta', o_3]$ n’appartient pas à la frontière de l’enveloppe de Pareto, alors ajouter le segment $[\beta, o_2]$. Nous noterons (a1) le cas où aucun segment n’est ajouté, (a2) le cas où seul l’un des deux segments est ajouté, et (a3) le cas où les deux


 FIG. 9.12 – La forme des chemins $P_{ii'}$ et $P_{jj'}$

segments sont ajoutés. Sur la Figure 9.13, nous avons représenté en hachuré les zones du plan n'appartenant pas à l'enveloppe de Pareto pour chacun de ces cas.

- (b) Si $P_{ii'}$ est le chemin qui tourne avant l'escalier $\mathcal{S}_{ij|i'j'}$, et si le segment $[\alpha', o_2]$ n'appartient pas à la frontière de l'enveloppe de Pareto, alors ajouter le segment $[\alpha, o_1]$. Si $P_{jj'}$ est le chemin qui tourne avant l'escalier $\mathcal{S}_{ij|i'j'}$, et si le segment $[\beta', o_4]$ n'appartient pas à la frontière de l'enveloppe de Pareto, alors ajouter le segment $[\beta, o_1]$. Nous noterons (b1) le cas où aucun segment n'est ajouté, et (b2) le cas où l'un des deux segments est ajouté. Sur la Figure 9.13, nous avons représenté en hachuré la zone du plan n'appartenant pas à l'enveloppe de Pareto pour le cas (b1).

Lors de la troisième phase, une procédure est appelée pour traiter chaque escalier. Comme les escaliers intersectent le réseau $N_1 \cup N_2$ de différentes manières, nous définissons, comme nous l'avons fait pour l'algorithme `ManhattanArrondi2`, les escaliers étendus. Nous notons ϕ , α'' et β'' les trois points délimitant la frontière d'un escalier étendu tel que les segments $[\phi, \alpha'']$ et $[\phi, \beta'']$ appartiennent au réseau $N_1 \cup N_2$. Le point ϕ est appelé origine de l'escalier étendu. Voici les points désignés par ϕ , α'' et β'' pour chacun des cas représentés sur la Figure 9.13 et le cas (c) représenté sur la Figure 9.12 :

- (a1) $\phi := o_3$, $\alpha'' := \alpha'$ et $\beta'' := \beta'$;
- (a2) $\phi := o_2$, $\alpha'' := \alpha'$ et $\beta'' := \beta$;
- (a3) $\phi := o_1$, $\alpha'' := \alpha$ et $\beta'' := \beta$;
- (b1) $\phi := o_2$, $\alpha'' := \alpha'$ et $\beta'' := \beta$;
- (b2) $\phi := o_1$, $\alpha'' := \alpha$ et $\beta'' := \beta$;
- (c) $\phi := o_1$, $\alpha'' := \alpha$ et $\beta'' := \beta$.

Sur ces deux figures, l'escalier étendu $\mathcal{S}_{ij|i'j'}^+$ défini à partir d'un escalier $\mathcal{S}_{ij|i'j'}$ est représenté en grisé.

Nous savons que les seules bandes qui intersectent le chemin M_{ij} d'un escalier $\mathcal{S}_{ij|i'j'}$, sont des bandes dont l'un des terminaux appartient à T_{ij} . Par conséquent, d'après la définition du réseau $N_1 \cup N_2$, nous pouvons remarquer, pour chaque terminal $t \in T_{ij}$, que l'intersection du segment horizontal de M_{ij} contenant t avec le réseau $N_1 \cup N_2$ est constituée d'un unique segment dont t est l'une des extrémités (si l'intersection est non vide). Nous notons $h(t)$ l'autre extrémité de ce segment. De même, le segment $[t, v(t)]$ représente l'intersection du segment vertical de M_{ij} contenant t avec le réseau $N_1 \cup N_2$. Nous notons M l'ensemble de ces *morceaux* de segments.

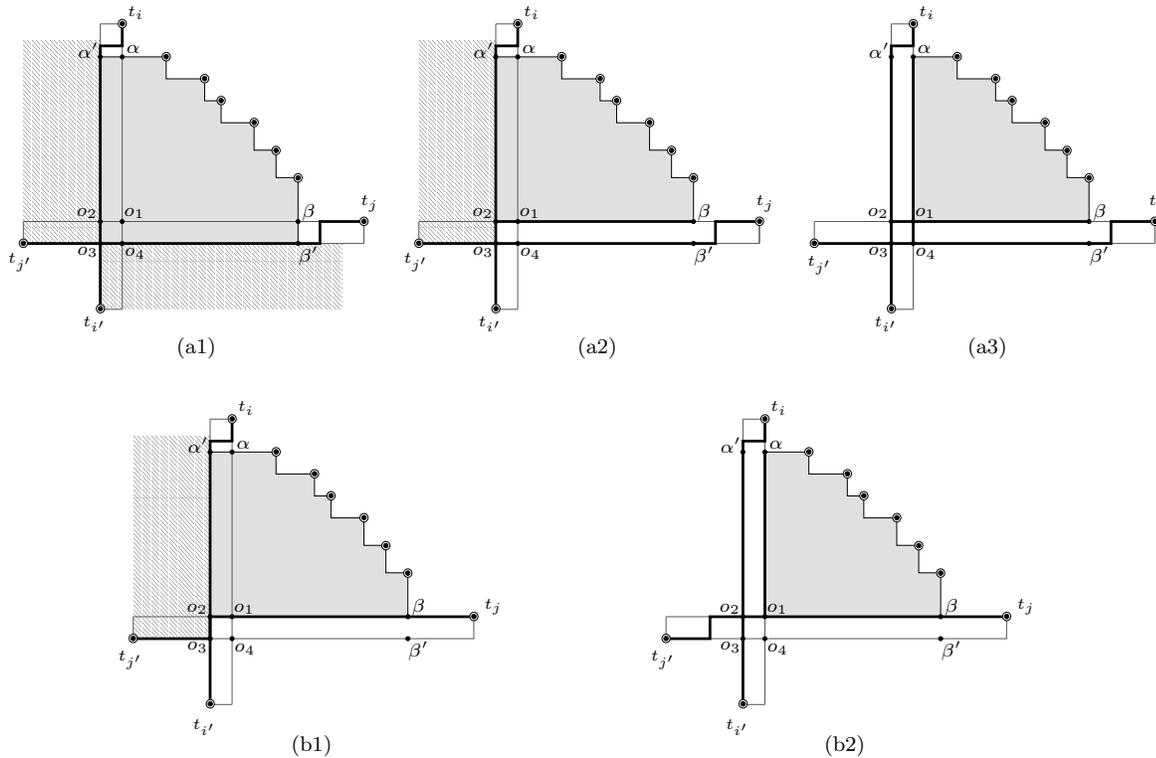


FIG. 9.13 – Illustration de la procédure BaseEscalier

Sur la Figure 9.11, nous avons représenté les deux chemins qui connectent deux bandes (t_k, t) et $(t_{k'}, t)$ intersectant M_{ij} au niveau de t , ainsi que les points $h(t)$ et $v(t)$.

Phase 3. Elle consiste à appeler la procédure `EscalierMorceauPrimalDual2` sur chaque escalier étendu $\mathcal{S}_{ij|j'j'}^+$ afin de construire un ℓ_1 -chemin entre ϕ et chacun des terminaux de T_{ij} . Certains morceaux des segments $[\phi, \alpha'']$, $[\phi, \beta'']$, et de l'ensemble M sont utilisés pour construire ces chemins. Voici la description de cette procédure récursive.

Procédure `EscalierMorceauPrimalDual2`($\mathcal{S}_{ij|j'j'}^+$). Trouver le terminal $t_m \in T_{ij}$ situé le plus bas tel que $|h(t_m)^x - \phi^x| \leq |v(t_m)^y - \phi^y|$ (par symétrie, sans perte de généralité, nous pouvons supposer que ce terminal existe). Soit t_s le terminal de T_{ij} situé juste en dessous de t_m (si ce terminal existe nous avons $|h(t_s)^x - \phi^x| > |v(t_s)^y - \phi^y|$). Le point d'intersection de la droite horizontale passant par t_m et du segment $[\phi, \alpha'']$ est noté ϕ' . De même, le point d'intersection de la droite verticale passant par t_s et du segment $[\phi, \beta'']$ est noté ϕ'' . Ajouter les segments $[h(t_m), \phi']$ et $[v(t_s), \phi'']$ au réseau N_3 afin de connecter t_m et t_s à l'origine ϕ . Si certains des terminaux de T_{ij} sont situés au dessus de t_m alors rappeler récursivement la procédure `EscalierMorceauPrimalDual2` sur l'escalier étendu partiel borné par $[\alpha'', \phi']$, $[t_m, \phi']$, et la partie du chemin M_{ij} située entre α'' et t_m (cet appel permet de connecter les terminaux situés au dessus de t_m à ϕ par des ℓ_1 -chemins qui passent par ϕ'). De la même manière, si t_s existe et qu'il existe des terminaux de T_{ij} situés à droite de t_s alors rappeler récursivement la procédure `EscalierMorceauPrimalDual2` sur l'escalier partiel borné par $[\beta'', \phi'']$, $[t_s, \phi'']$, et la partie de M_{ij} située entre t_s et β'' .

Lemme 9.3.3 *La complexité en temps de l'algorithme `ManhattanPrimalDual2` est $O(n \log n)$.*

Preuve. D'après le Lemme 9.3.1, la première phase s'effectue en temps $O(n \log n)$. La seconde phase s'effectue en temps $O(n)$ car le nombre d'escaliers est linéaire et que le traitement réalisé sur chacun d'entre eux peut s'effectuer en temps constant. Pour cela, il suffit d'utiliser la représentation par bande et par palier de l'enveloppe $\mathcal{P}_{d_1}(T)$. En utilisant une recherche dichotomique pour identifier t_m , la procédure `EscalierMorceauPrimalDual2` s'exécute en temps $O(k \log k)$ sur un escalier de taille k car un nouveau terminal est connecté à o avant chaque appel récursif. Comme la somme des tailles des escaliers est linéaire, nous déduisons que la construction du réseau N_3 s'effectue en temps $O(n \log n)$. \square

Lemme 9.3.4 *Le réseau $N := N_1 \cup N_2 \cup N_3$ est un réseau de Manhattan.*

Preuve. Dans la première phase les paires de l'ensemble F_{band} sont connectées explicitement par l'algorithme. Dans la troisième phase, la procédure `EscalierMorceauPrimalDual2`($\mathcal{S}_{ij|i'j'}^+$) permet de connecter les terminaux de T_{ij} à ϕ . Comme les segments de $P_{ii'}$, $P_{jj'}$ et du réseau N_2 permettent de connecter par un ℓ_1 -chemin ϕ et $t_{i'}$, ainsi que ϕ et $t_{j'}$, nous déduisons que N satisfait les paires formant l'escalier $\mathcal{S}_{ij|i'j'}$ par des ℓ_1 -chemins passant par ϕ . Le réseau $N_1 \cup N_2 \cup N_3$ est donc un réseau de Manhattan, car il satisfait les paires de l'ensemble générateur $F_{\text{band}} \cup F_{\text{esc}}$. \square

Lemme 9.3.5 *Les chemins $P_{ii'}$ et $P_{jj'}$ tournent avant ou après l'escalier $\mathcal{S}_{ij|i'j'}$.*

Preuve. Considérons un escalier orienté comme sur la Figure 9.11. Nous allons montrer la propriété pour le chemin $P_{jj'}$ (pour le chemin $P_{ii'}$ la preuve est similaire). Il faut considérer les deux cas suivants : (1) le balayage est effectué de haut en bas ; (2) le balayage est effectué de bas en haut. Voici l'analyse de ces deux cas :

1. Soit $[t_i, f]$ l'intersection de $R_{ii'}$ avec le ℓ_1 -chemin permettant de satisfaire la bande horizontale R_{ki} située juste au dessus de $R_{ii'}$ (par construction, t_i est nécessairement une extrémité de ce segment). Comme aucune bande ne traverse l'escalier $\mathcal{S}_{ij|i'j'}$, remarquons que f' est à droite de α . Soit $[f', f'']$ l'arête de passage du chemin $P_{jj'}$. Par construction, rappelons que $[f', f'']$ est l'arête de passage de la bande $R_{ii'}$ qui est la plus à droite, qui appartient à $R(f, t_{i'})$, et qui appartient à l'enveloppe de Pareto. Par conséquent, si le chemin $P_{jj'}$ ne tourne ni avant ni après l'escalier, c'est à cause de l'enveloppe de Pareto. Dans ce cas, nous déduisons que $[f', f'']$ est un arête appartenant à la frontière de l'enveloppe. En utilisant le même raisonnement que dans la preuve du Lemme 9.3.2, nous concluons que cela est impossible.
2. Soit T' l'ensemble des terminaux situés en dessous de t_i , *i.e.*, les terminaux t tel que $t^y \leq t_i^y$. Par construction, nous pouvons remarquer que le réseau N_1^H est inscrit dans la grille de Hanan. Par conséquent, comme le balayage est effectué de bas en haut, nous déduisons que la partie du réseau N_1^H connectant les bandes de l'ensemble T' est inscrite dans la grille de Hanan de l'ensemble T' . Comme la zone \mathcal{Q}_4^+ (Fig. 7.6) ne contient pas de terminaux, nous déduisons qu'aucune droite de la grille $G(T')$ ne traverse l'escalier et donc que le chemin $P_{jj'}$ tourne nécessairement avant ou après celui-ci.

\square

9.3.2 Analyse

Afin de montrer que $|N| \leq 2 \cdot |N_{\text{opt}}|$, nous allons exhiber une solution duale \mathbf{y} du programme linéaire (4) dont le coût est égal à $\frac{1}{2} \cdot |N|$. Pour obtenir cette solution, une coupe dont la valeur sera précisée plus bas est associée à chaque arête de la grille unitaire appartenant aux réseaux N_1^H , N_1^V , N_2 et N_3 .

Avant de décrire la solution duale \mathbf{y} , nous allons montrer, à l'aide de la méthode primale-duale, que le réseau N_1^H est le plus petit réseau qui satisfait les bandes horizontales. Ce résultat n'est pas directement utilisé dans la justification du facteur d'approximation de l'algorithme, mais il permet de justifier le choix des coupes employées pour décrire la solution duale \mathbf{y} . Nous allons donc exhiber une solution duale \mathbf{y}' du programme linéaire obtenu à partir de (4) en remplaçant F par F_{band} . Cette solution duale fournit un certificat d'optimalité pour le réseau N_1^H . Soit e une arête appartenant à un segment du réseau N_1^H . Afin de définir la coupe associée à e dans la solution \mathbf{y}' , nous distinguons les deux cas suivants :

1. Si e est une arête horizontale qui a été ajoutée par l'algorithme lors de la construction du ℓ_1 -chemin permettant de connecter une bande horizontale $R_{jj'}$, alors la $(t_j, t_{j'})$ -coupe verticale qui la contient lui est associée ;
2. Si e est une arête (de passage) verticale qui a été ajoutée par l'algorithme lors de la construction du ℓ_1 -chemin permettant de connecter une bande horizontale $R_{jj'}$, alors la $(t_j, t_{j'})$ -coupe horizontale qui la contient lui est associée .

L'ensemble des coupes associées aux arêtes du réseau N_1^H est noté \mathcal{C} . Sur la figure 9.14, nous avons représenté en gras et en pointillés les coupes de cet ensemble. Nous montrerons par la suite, d'après l'algorithme de construction du réseau N_1^H , que ces coupes ne s'intersectent pas deux à deux, et que chacune d'elles est associée à une seule arête.

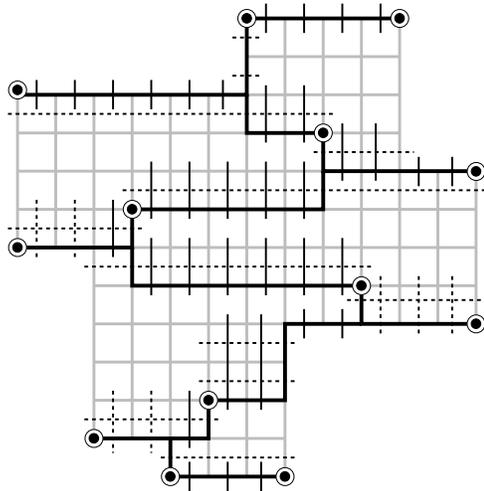


FIG. 9.14 – Le réseau optimal primal N_1^H et la solution duale optimale \mathbf{y}'

Lemme 9.3.6 *Le réseau N_1^H est le plus petit réseau qui satisfait les bandes horizontales.*

Preuve. Nous définissons la solution duale \mathbf{y}' tel que $y'_C := 1$ si C est une coupe de \mathcal{C} et tel que $y_C := 0$ si C n'appartient pas à \mathcal{C} . Ainsi défini, comme une coupe est associée à une seule arête,

le coût de \mathbf{y}' est égal $|N_1^H|$. Pour établir le lemme, il suffit de montrer que \mathbf{y}' est une solution admissible du programme linéaire dual, *i.e.*, pour toute arête e de la grille :

$$\sum_{C \in \mathcal{C}: e \in C} y_C \leq 1.$$

Comme les coupes de l'ensemble \mathcal{C} ne s'intersectent pas deux à deux, nous déduisons que c'est bien le cas. \square

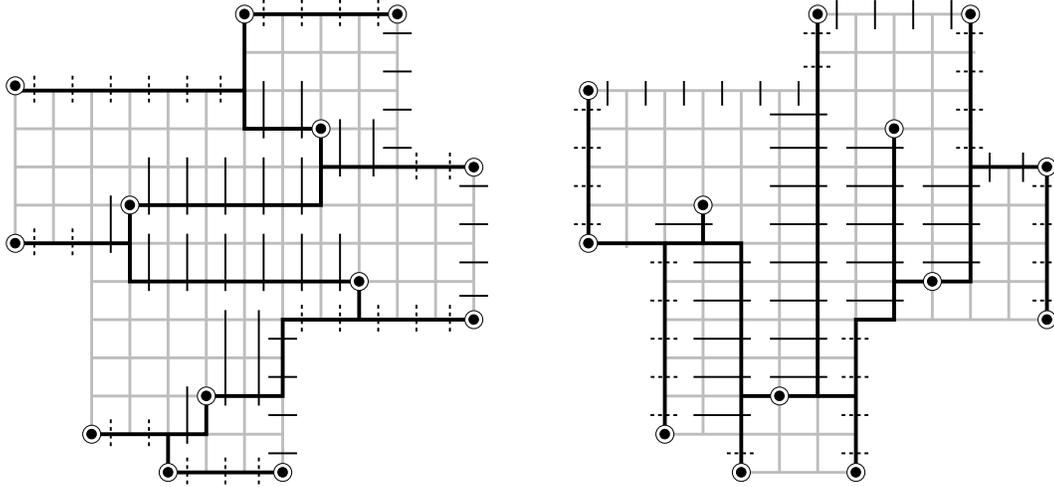


FIG. 9.15 – Les coupes associées aux arêtes des réseaux N_1^H et N_1^V

A présent, nous allons décrire la solution duale \mathbf{y} . Nous allons voir que les coupes de la solution \mathbf{y} associées aux réseaux N_1^H et N_1^V sont similaires aux coupes de la solution \mathbf{y}' . Certaines de ces coupes sont *déplacées* sur la frontière de l'enveloppe de Pareto et d'autres sont *raccourcies*. Les coupes qui diffèrent entre les deux solutions sont représentées en pointillés sur la Figure 9.14. Ces opérations ont pour but de *libérer* certaines arêtes appartenant aux escaliers étendus pour faire passer par celles-ci des coupes associées aux arêtes du réseau N_3 .

Coupes associées aux arêtes des réseaux N_1^H et N_1^V . Soit e une arête appartenant à un segment du réseau N_1^H . Afin de définir la coupe associée à e , nous distinguons les trois cas suivants :

1. Si e est une arête horizontale qui a été ajoutée par l'algorithme lors de la construction du ℓ_1 -chemin permettant de connecter une bande horizontale $R_{jj'}$, et si e n'appartient pas à la frontière de l'enveloppe de Pareto, alors la $(t_j, t_{j'})$ -coupe verticale qui la contient lui est associée ;
2. Si e est une arête horizontale qui appartient à la frontière de l'enveloppe de Pareto, nous savons que e appartient à une paire frontière $\{t_j, t_{j'}\}$. Dans ce cas, la $(t_j, t_{j'})$ -coupe verticale qui se réduit au singleton $\{e\}$ est associée à l'arête e .
3. Si e est une arête (de passage) verticale, nous savons que e est parallèle à une arête e' appartenant à la frontière de l'enveloppe de Pareto (e' peut être choisie indifféremment à droite ou à gauche). Nous savons que e' appartient à une paire frontière $\{t_j, t_{j'}\}$. Dans ce cas, la $(t_j, t_{j'})$ -coupe horizontale qui se réduit au singleton $\{e'\}$ est associée à l'arête e .

- (e) les coupes verticales de \mathcal{C}_1^V ne s'intersectent pas entre elles ;
- (f) chacune des coupes verticales de \mathcal{C}_1^V est associée à une seule arête du réseau N_1^V ;
- (g) les coupes verticales de \mathcal{C}_2 passent uniquement par des arêtes appartenant à des bandes, et ne passent pas par des arêtes appartenant à la frontière de l'enveloppe de Pareto ;
- (h) les coupes verticales de \mathcal{C}_2 ne s'intersectent pas entre elles ;
- (i) chacune des coupes verticales de \mathcal{C}_2 est associée à une seule arête du réseau N_2 ;
- (j) une coupe verticale de \mathcal{C}_2 , définie à partir d'une bande \mathcal{B} , passe par deux arêtes de la frontière de \mathcal{B} appartenant au réseau $N_1 \cup N_2$;
- (k) une coupe de \mathcal{C}_3 associée à une arête d'un escalier étendu \mathcal{S} passe uniquement par des arêtes de \mathcal{S} ;
- (l) au plus deux coupes de \mathcal{C}_3 associées aux arêtes d'un escalier \mathcal{S} passent par la même arête ;
- (m) chacune des coupes de \mathcal{C}_3 est associée à une seule arête du réseau N_3 ;
- (n) les coupes associées aux arêtes d'un escalier \mathcal{S} ne s'intersectent pas sur la frontière de \mathcal{S} ;
- (o) aucune coupe de \mathcal{C}_3 ne passe par une arête appartenant au réseau $N_1 \cup N_2$ ou à la frontière de l'enveloppe de Pareto.

Preuve. Les assertions (a) et (d) sont des conséquences directes de la définition des coupes de \mathcal{C}_1^H et de \mathcal{C}_1^V . Comme une arête de la frontière est parallèle aux arêtes de passage d'une seule bande, nous déduisons les assertions (e) et (f). D'après les conditions nécessaires pour ajouter un segment au réseau N_2 (pas de frontière appartenant à la base de l'escalier) et d'après la définition des coupes de \mathcal{C}_2 , nous déduisons les assertions (g), (h), (i) et (j). En utilisant une preuve similaire à celle du Lemme 9.2.4, nous obtenons les assertions (k), (l), (m) et (n). D'après la définition des coupes de \mathcal{C}_3 et des points $h(t)$ et $v(t)$, nous déduisons l'assertion (o).

Il reste donc à montrer les assertions (b) et (c). Supposons que ces deux assertions soient vraies pour les $i - 1$ premières bandes horizontales et montrons qu'elles le sont pour les i premières. Soit $R_{ii'}$ la $i^{\text{ième}}$ bande horizontale et R_{ki} la bande horizontale précédente. Soit $[t_i, f]$ l'intersection du chemin P_{ki} avec la bande $R_{ii'}$, soit $[f', f'']$ l'arête de passage du chemin $P_{ii'}$, et soit $[f^0, f]$ l'arête de passage de P_{ki} (Fig. 9.9). Soit E' les arêtes horizontales ajoutées par la procédure `BandePrimaleDuale1` pour construire le chemin $P_{ii'}$ ($E' = \{e \in [f, f'] \cup [f'', t_{i'}]\}$). Par définition et par construction, remarquons qu'une coupe verticale de \mathcal{C}_1^V associée à une arête $e \in E'$ est une coupe frontière si e appartient au coté haut de la bande ($e \in [f, f']$), et que c'est une $(t_i, t_{i'})$ -coupe seulement si e est une arête appartenant au coté bas de $R_{ii'}$. Comme ces propriétés sont vraies pour toutes les bandes, nous déduisons que les coupes de \mathcal{C}_1^V associées aux arêtes de $[t_k, f^0]$ ne sont pas de (t_k, t_j) -coupes et donc qu'elles n'intersectent pas les coupes associées aux arêtes de E' . Ces remarques montrent les deux assertions car les coupes de \mathcal{C}_1^V associées aux arêtes de E' n'intersectent pas les autres coupes et qu'elles sont associées à une seule arête. \square

Théorème 9.3.1 *L'algorithme `ManhattanPrimalDual2` est un algorithme d'approximation de facteur 2 en temps $O(n \log n)$ pour le problème du réseau de Manhattan minimal.*

Preuve. D'après le Lemme 9.3.3 et le Lemme 9.3.4, il reste seulement à montrer le facteur d'approximation de l'algorithme. Pour cela, nous définissons une solution duale y tel que $y_C :=$

$k \cdot \frac{1}{2}$ si C est une coupe de $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$ associée à k arêtes de la grille unitaire, et tel que $y_C := 0$ si C n'appartient pas à $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$. Ainsi défini, le coût de \mathbf{y} est égal à $\frac{1}{2} \cdot |N_1 \cup N_2 \cup N_3|$. Pour établir le théorème, il suffit de montrer que \mathbf{y} est une solution admissible du programme linéaire dual, *i.e.*, pour toute arête e de la grille :

$$\sum_{C \in \mathcal{C}: e \in C} y_C \leq 1.$$

D'après les valeurs données aux coupes, cela équivaut à montrer que le nombre d'arêtes associées aux coupes passant par une arête e est inférieur ou égal à 2. Supposons, sans perte de généralité, que e est une arête horizontale. Remarquons que les seules coupes qui peuvent contenir l'arête e sont des coupes verticales de bandes horizontales, des coupes en L définies à partir d'escaliers, ou une coupe verticale définie à partir d'une paire frontière. Les bandes horizontales et les escaliers s'intersectant uniquement sur leur frontière, il suffit de considérer les 6 cas suivants : (1) e est une arête appartenant à la frontière de l'enveloppe de Pareto, (2) e appartient à la frontière de deux bandes horizontales, (3) e appartient à la frontière de deux escaliers, (4) e appartient à la frontière d'un escalier et d'une bande horizontale, (5) e appartient uniquement à un escalier, ou (6) e appartient uniquement à une bande horizontale.

- (1) L'arête e appartient à la frontière de l'enveloppe de Pareto. D'après les assertions (g), (o), (b) et (e), seules une coupe verticale de l'ensemble \mathcal{C}_1^H et une coupe verticale de l'ensemble \mathcal{C}_1^V peuvent contenir e . D'après les assertions (c) et (f), une seule arête est associée à chacune de ces coupes. Par conséquent, dans ce cas, la contrainte duale concernant e est vérifiée.
- (2) L'arête e appartient à la frontière de deux bandes horizontales \mathcal{B} et \mathcal{B}' . D'après les assertions (d), (k), (b) et (h), seules une coupe verticale de l'ensemble \mathcal{C}_1^H et une coupe verticale de l'ensemble \mathcal{C}_2 peuvent contenir e . D'après les assertions (c) et (i), une seule arête est associée à chacune de ces coupes. Par conséquent, dans ce cas, la contrainte duale concernant e est vérifiée.
- (3) L'arête e appartient à la frontière de deux escaliers \mathcal{S} et \mathcal{S}' . D'après les assertions (a), (d), (g), (k) et (n), seules une coupe de \mathcal{C}_3 associée à des arêtes de \mathcal{S} et une coupe de \mathcal{C}_3 associée à des arêtes de \mathcal{S}' peuvent contenir e . D'après l'assertion (m), une seule arête est associée à chacune de ces coupes. Par conséquent, dans ce cas, la contrainte duale concernant e est vérifiée.
- (4) L'arête e appartient à la frontière d'un escalier \mathcal{S} et à la frontière d'une bande horizontale \mathcal{B} . Si e appartient au réseau $N_1 \cup N_2$, d'après les assertions (o), (j), (a), (d), (g), (b) et (h), seules une coupe de \mathcal{C}_2 et une coupe de \mathcal{C}_1^H peuvent contenir e . D'après les assertions (b) et (h), une seule arête est associée à chacune de ces coupes. Par conséquent, la contrainte duale concernant e est vérifiée si e appartient au réseau $N_1 \cup N_2$. Si e n'appartient pas au réseau $N_1 \cup N_2$, d'après les assertions (d), (j), (k), (n), (a) et (b), seules une coupe de \mathcal{C}_3 associée à des arêtes de \mathcal{S} et une coupe de \mathcal{C}_1^H peuvent contenir e . D'après les assertions (c) et (m), une seule arête est associée à chacune de ces coupes. Par conséquent, la contrainte duale concernant e est vérifiée si e n'appartient pas au réseau $N_1 \cup N_2$.
- (5) L'arête e appartient à un seul escalier \mathcal{S} . D'après les assertions (a), (d), (g), (k) et (l), seules deux coupes de \mathcal{C}_3 associées à des arêtes de \mathcal{S} peuvent contenir e . D'après l'assertion (m), une seule arête est associée à chacune de ces coupes. Par conséquent, dans ce cas, la contrainte duale concernant e est vérifiée.

- (6) L'arête e appartient à une seule bande horizontale \mathcal{B} . D'après les assertions (d), (k), (g), (a), (b) et (h), seules une coupe de \mathcal{C}_1^H et une coupe de \mathcal{C}_2 peuvent contenir e . D'après l'assertion (c) et (i), une seule arête est associée à chacune de ces coupes. Par conséquent, dans ce cas, la contrainte duale concernant e est vérifiée.

□

9.4 Résultats expérimentaux

Nous avons testé, pour des instances aléatoires, les performances des algorithmes d'approximation `ManhattanArrondi2`, `ManhattanPrimalDual3` et `ManhattanPrimalDual2`. Les algorithmes ont été implémentés en LANGAGE C et exécutés sur un Pentium IV 2,66 GHz. Nous avons utilisé l'outil XPRESS-OPTIMIZER release 14.24 pour résoudre les programmes linéaires et pour obtenir les solutions optimales entières des différentes instances. La bibliothèque que nous avons développée représente environ 4000 lignes de code.

9.4.1 Les instances

Afin de tester la robustesse des algorithmes proposés, nous avons défini deux types d'instances aléatoires. Des instances de type *Rectangle* pour évaluer les performances des algorithmes dans leur globalité, et des instances de type *Escalier* pour évaluer plus particulièrement la procédure `EscalierPrimalDual2`.

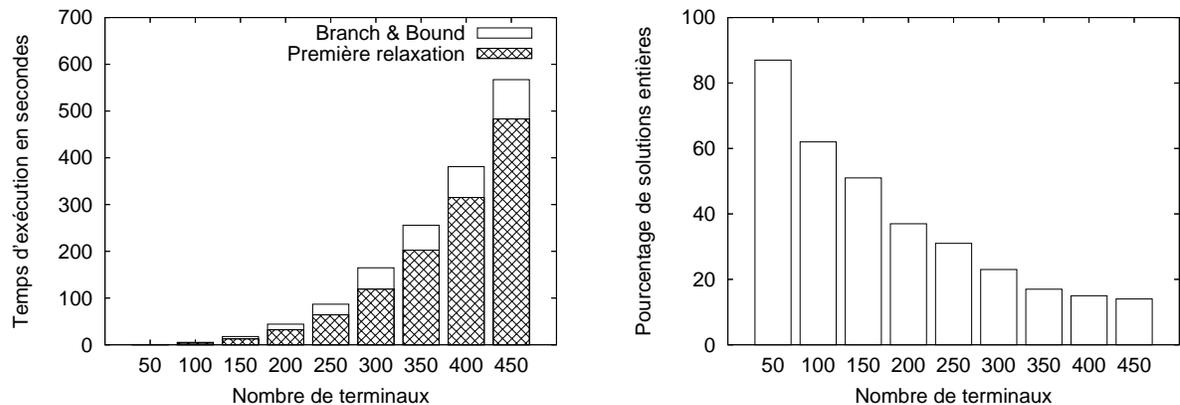


FIG. 9.17 – Performance du programme linéaire en nombres entiers

Instances Rectangle. Pour construire une instance Rectangle composée de n terminaux, nous tirons d'abord n coordonnées aléatoires fractionnaires dont les valeurs sont comprises entre 0 et 1 (ce premier tirage permet de positionner les terminaux les uns par rapport aux autres). Ensuite, nous construisons la grille rectilinéaire engendrée par T . Dans une telle grille, les distances qui séparent deux paliers consécutifs sont très proches, *i.e.*, la grille est quasiment uniforme. Afin d'éviter cela, pour chaque famille d'arêtes parallèles comprises entre deux paliers consécutifs, nous tirons à nouveau une valeur aléatoire fractionnaire comprise entre 0 et 1 désignant la nouvelle longueur de la famille d'arêtes.

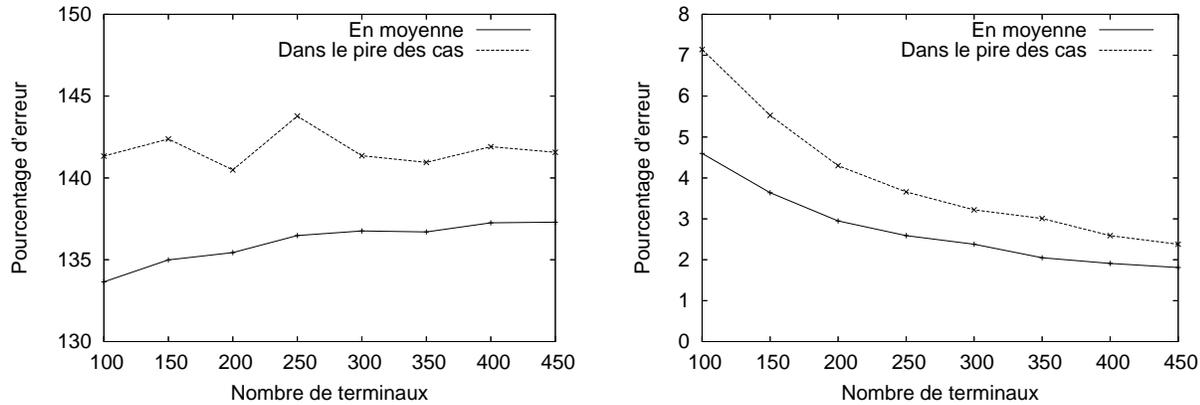


FIG. 9.18 – Solutions de ManhattanPrimalDual3 et ManhattanPrimalDual2

Instances Escalier. Pour construire une instance Escalier composée de n terminaux, nous tirons deux séries $X = \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ et $Y = \{y_1, \dots, y_{n-1}\}$ de $n-1$ valeurs aléatoires comprises entre 0 et 1. Pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, nous définissons les coordonnées du terminal t_i par $t_i^x = \sum_{j=1}^i x_j$ et $t_i^y = \sum_{j=1}^i y_j$. Le dernier terminal t_n , qui est l'origine de l'escalier, a pour coordonnées $t_n^x = t_1^x$ et $t_n^y = t_{n-1}^y$.

9.4.2 Résolutions exactes

Pour calculer les solutions optimales des différentes instances, nous avons utilisé le programme linéaire (3) basé sur la formulation par les flots. En 600 secondes, sans utiliser la notion d'ensemble générateur, la programmation linéaire en nombres entiers permet de résoudre des instances Rectangle composées de 100 terminaux et des instances Escalier composées de 50 terminaux. En utilisant l'ensemble générateur bande-escalier, des instances Rectangle composées de 450 terminaux peuvent être résolues en 600 secondes. Cette nette amélioration est due à la diminution du nombre de variables qui passe de $O(n^4)$ à $O(n^3)$. Pour les instances Escalier, l'ensemble générateur bande-escalier ne sert pas car celui-ci est composé de quasiment toutes les paires. Pour pouvoir évaluer les performances de la procédure EscalierPrimalDual2 sur de plus grandes instances Escalier, nous avons utilisé l'algorithme par programmation dynamique proposé dans [60].

Pour les instances que nous avons pu résoudre en un temps raisonnable, nous avons remarqué que la solution optimale entière a souvent le même coût que la solution optimale de la relaxation linéaire. Pour les instances Escalier, nous n'avons jamais trouvé d'instance non-entière. Pour ces différentes raisons, le temps de calcul de la première relaxation linéaire est beaucoup plus élevé que l'étape de Branch&Bound. Par exemple, pour une instance Rectangle de 450 points, il faut environ 550 secondes pour résoudre la première relaxation linéaire et environ 50 secondes pour l'étape de Branch&Bound en elle-même. Sur la Figure 9.17, nous avons représenté le temps moyen passé pour résoudre la première relaxation linéaire et le temps moyen passé dans l'étape de Branch&Bound. Nous avons également représenté le pourcentage de solutions entières à l'issue du calcul de la première relaxation.

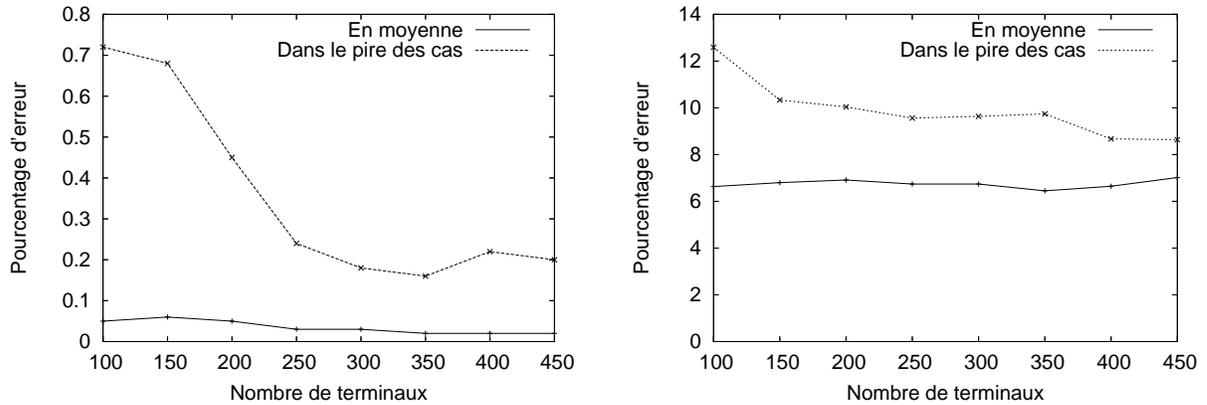


FIG. 9.19 – Solutions de ManhattanArrondi2 et EscalierPrimalDual2

9.4.3 Qualité des solutions approchées

Afin d'évaluer la qualité des solutions obtenues par les algorithmes `ManhattanArrondi2`, `ManhattanPrimalDual3` et `ManhattanPrimalDual2`, pour chaque taille multiple de 50 comprise entre 50 et 500, nous avons tiré 100 instances aléatoires Rectangle et 100 instances aléatoires Escalier. Sur la Figure 9.18, nous avons représenté le pourcentage d'erreur des algorithmes `ManhattanPrimalDual3` et `ManhattanPrimalDual2` sur des instances de type Rectangle. Sur la Figure 9.19, nous avons représenté le pourcentage d'erreur de l'algorithme `ManhattanArrondi2` sur des instances de type Rectangle et le pourcentage d'erreur de la procédure `EscalierPrimalDual2` sur des instances de type Escalier.

Nous pouvons observer, sur ces différentes figures, que l'algorithme `ManhattanArrondi2` donne d'excellentes solutions en moyenne et dans le pire des cas. Plus le nombre de terminaux augmente, plus le pourcentage d'erreur diminue. L'algorithme `ManhattanPrimalDual2` construit des solutions avec moins de 7% d'erreur en moyenne et dans le pire des cas. Le pourcentage diminue également quand le nombre de terminaux augmente. L'algorithme `ManhattanPrimalDual3` a un comportement un peu différent. Quand le nombre de terminaux augmente, les pourcentages d'erreur en moyenne et dans le pire des cas tendent vers 137%. La procédure `EscalierPrimalDual2` a également le même comportement. Les pourcentage d'erreur en moyenne et dans le pire des cas tendent vers 7%.

9.4.4 Temps d'exécution

Afin d'évaluer le temps d'exécution des algorithmes sur de grandes instances, pour chaque taille multiple de 100000 comprise entre 100000 et 1000000, nous avons tiré 100 instances aléatoires Rectangle et 100 instances aléatoires Escalier. Le graphique de gauche de la Figure 9.20 représente le temps d'exécution moyen des algorithmes utilisant la méthode primale-duale pour cet ensemble d'instances, et le graphique de droite le temps d'exécution de l'algorithme `ManhattanArrondi2` sur les instances de moins de 450 terminaux. Nous pouvons observer que les algorithmes `ManhattanPrimalDual3` et `ManhattanPrimalDual2` peuvent traiter 1 million de points en moins de 15 secondes.

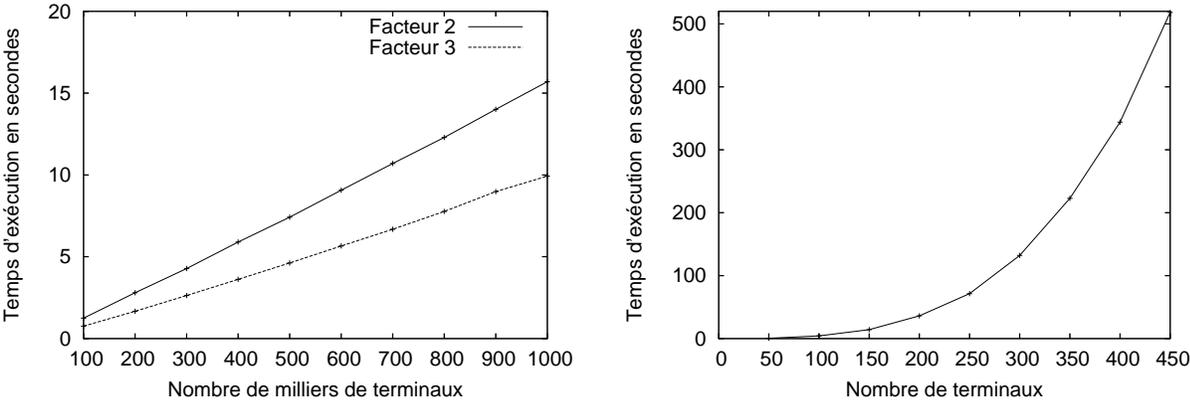
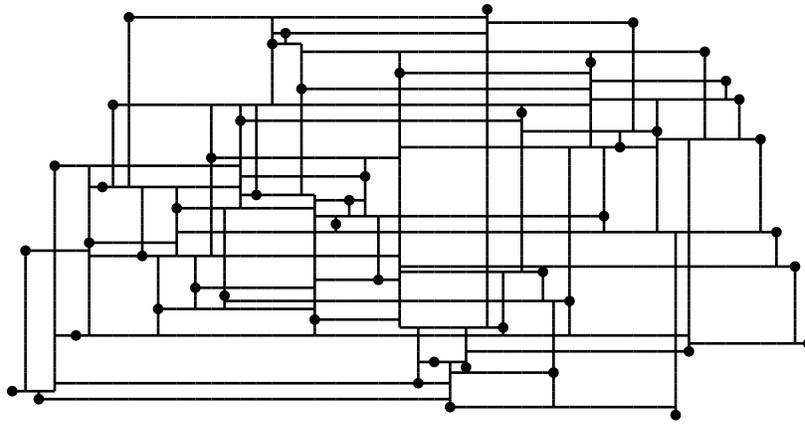
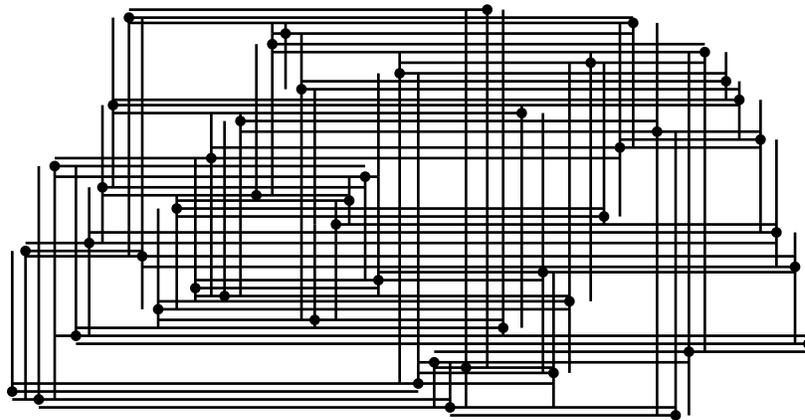


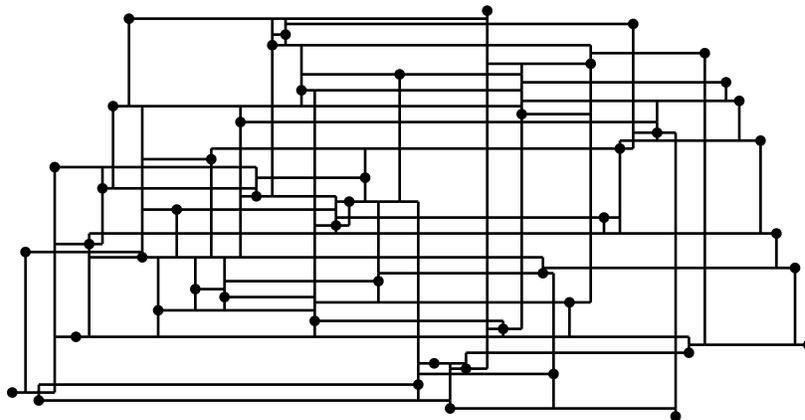
FIG. 9.20 – Temps d'exécution des algorithmes d'approximation



Algorithme ManhattanArrondi2 : coût = 250983 (optimal)



Algorithme ManhattanPrimalDual3 : coût = 566037



Algorithme ManhattanPrimalDual2 : coût = 267272

FIG. 9.21 – Réseaux construits par les trois algorithmes d'approximation

Conclusion

Dans la première partie, nous avons présenté deux caractérisations de l’enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ dans \mathbb{R}^3 , ainsi que deux algorithmes de construction dont un en temps optimal $O(n \log n)$. Nous avons également décrit un algorithme générique permettant de construire l’enveloppe $\mathcal{P}_d(T)$ dans \mathbb{R}^m pour toute distance d induite par une norme polyédrale. Cependant, cet algorithme générique n’utilise pas de caractérisation spécifique pour construire $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ dans \mathbb{R}^m . Il faudrait donc trouver une caractérisation de $\mathcal{P}_{d_1}(T)$ dans \mathbb{R}^m afin de développer un algorithme de construction de complexité similaire à celle de l’algorithme de construction des enveloppes convexes dans \mathbb{R}^m . Pour l’enveloppe de Pareto $\mathcal{P}_{d_\infty}(T)$, et sa partie stricte $\mathcal{P}_{d_\infty}^0(T)$, la même question se pose. Contrairement à l’enveloppe $\mathcal{P}_{d_1}(T)$, nous avons déjà différentes caractérisations pour $\mathcal{P}_{d_\infty}(T)$ et $\mathcal{P}_{d_\infty}^0(T)$. Il serait intéressant de les utiliser pour développer des algorithmes efficaces, d’autant plus que ces caractérisations par des cônes semblent appropriées.

L’étude des enveloppes de Pareto dans des structures discrètes, ou géométriques, telles que les sommets de l’hypercube de dimension m , \mathbb{Z}^m , certaines classes de graphes, ou certaines classes de polygones et de polyèdres ouvre également plusieurs pistes de recherche intéressantes. Entre autres, si l’une des ces structures munies d’une distance d vérifie la propriété de Helly, comment construire l’enveloppe de Pareto en utilisant le fait que $\mathcal{P}_d(T)$ et $\Upsilon_d(T)$ coïncident ?

Dans la deuxième partie, nous avons présenté trois algorithmes d’approximation pour le problème des réseaux de Manhattan minimum, dont deux algorithmes d’approximation de facteur 2. Nous avons ainsi répondu à la question posée dans [36]. Cependant, la question concernant le statut du problème reste ouverte. A présent, au vu des très bon résultats expérimentaux, nous pouvons nous demander si il est possible de modifier les algorithmes, ou leur analyse, afin d’obtenir un meilleur facteur d’approximation, un algorithme exact, ou un schéma d’approximation polynomial (PTAS). En effet, nous avons un algorithme par balayage permettant de construire le plus petit réseau qui satisfait les bandes horizontales ou verticales, et un algorithme par programmation dynamique [60] permettant de construire le plus petit réseau qui satisfait les paires formant un escalier, mais nous ne savons pas pour l’instant combiner les deux algorithmes pour obtenir un facteur inférieur à 2.

Comme nous l’avons remarqué dans l’introduction, les réseaux de Manhattan sont exactement les 1-spanners pour la norme ℓ_1 . Pour cette raison, nous pouvons naturellement nous intéresser à la construction du plus petit 1-spanner associé à une norme polyédrale. D’autant plus que la notion de bande et la formulation en programmation linéaire en nombres entiers peuvent se généraliser dans le plan. La formulation en nombres entiers, contrairement à la décomposition en bande-escalier, peut également se généraliser pour des terminaux de \mathbb{R}^m . Dans ce cas, par exemple, comment utiliser cette formulation pour généraliser la méthode par arrondis ?

Le problème des réseaux de Manhattan minimum est lié au problème des *arborescences rectilinéaires de Steiner minimum* [60] : étant donné un ensemble de terminaux T et un terminal

spécifique s , trouver le plus petit réseau qui connecte s à chacun des terminaux de T par un chemin de Manhattan. Nous pouvons formuler une généralisation de ces deux problèmes que nous appelons *problème des réseaux des Manhattan F -restreint minimum* : étant donné un ensemble de terminaux T et un ensemble de paires de terminaux F , trouver le plus petit réseau qui satisfait l'ensemble des paires de F par un chemin de Manhattan. Si F est un graphe complet, nous obtenons le problème des réseaux de Manhattan minimum. Si F est une étoile, nous obtenons le problème des arborescences rectilinéaires de Steiner minimum. La formulation en nombres entiers que nous avons présentée peut être utilisée pour ce nouveau problème. Cependant, les algorithmes basés sur la méthode primale-duale ou la méthode par arrondis ne peuvent pas se généraliser directement. L'extension de ces méthodes pour ce problème est donc une question intéressante. Contrairement au problème des réseaux de Manhattan minimum, un exemple simple montre que le gap d'intégralité est supérieur ou égal à $\frac{3}{2}$: soit T l'ensemble composé des quatre sommets d'un carré unitaire, et soit F l'ensemble composé des deux paires de sommets diagonalement opposés de ce carré. La solution optimale entière de coût 3 est composée de trois cotés du carré, tandis que la solution fractionnaire de coût 2 est obtenue en donnant la valeur $\frac{1}{2}$ aux quatre variables associées aux cotés du carré. Cet exemple, qui est peut être un pire des cas, nous amène à nous demander s'il existe un algorithme d'approximation de facteur $\frac{3}{2}$ pour le problème des réseaux de Manhattan F -restreint.

Bibliographie

- [1] N. ARONSAJN et P. PANITCHPAKDI (1956). Extensions of uniformly continuous transformations and hyperconvex metric spaces. *Pacific Journal of Mathematics* 6, pp. 405-439.
- [2] S. ARYA, G. DAS, D. M. MOUNT, J. S. SALOWE et M. SMID (1995). Euclidean spanners : short, thin, and lanky. In *Proceedings of STOC'95, the 27th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing*, pp. 489-498.
- [3] S.P. AVANN (1961). Metric ternary distributive semi-lattices. *Proceedings of the American Mathematical Society* 12, pp. 407-414.
- [4] S. ARORA (1998). Polynomial time approximation schemes for euclidean traveling salesman and other geometric problems. *Journal of the Association for Computing Machinery* 45(3), pp. 753-782.
- [5] H.-J. BANDELT (1984) Retracts of hypercubes. *Journal of Graph Theory* 8, pp. 501-510.
- [6] H.-J. BANDELT (1985). Networks with Condorcet solutions. *European Journal of Operational Research* 20, pp. 314-326.
- [7] H.-J. BANDELT (1994) Phylogenetic networks. *Verh. Naturwiss. Ver. Hamburg* 34, pp. 51-71.
- [8] H.-J. BANDELT et V. CHEPOI (2005). Metric graph theory and geometry : a survey. *Discrete and Computational Geometry*. (à paraître)
- [9] H.-J. BANDELT, V. CHEPOI, A. DRESS, J. KOOLEN (2005). Combinatorics of lopsided sets. *European Journal of Combinatorics*. (à paraître)
- [10] H.-J. BANDELT, V. CHEPOI, A. DRESS, J. KOOLEN. Geometry of lopsided sets. (en préparation)
- [11] H.-J. BANDELT et J. HEDLÍKOVÁ (1983). Median algebras. *Discrete Mathematics* 45, pp. 1-30.

- [12] M. BENKERT, T. SHIRABE et A. WOLFF (2004). The minimum Manhattan network problem : approximations and exact solutions. In *Proceedings of EWCG'04, the 20th European Workshop on Computational Geometry*, pp. 209–212.
- [13] M. BENKERT, A. WOLFF et F. WIDMANN (2004). The minimum Manhattan network problem : a fast factor-3 approximation. In *Proceedings of JCDCG'04, the 8th Japanese Conference on Discrete and Computational Geometry*, pp. 85–86. (Technical Report 2004-16, Fakultät für Informatik, Universität Karlsruhe).
- [14] L. M. BLUMENTHAL (1970). *Theory and Applications of Distance Geometry*. Chelsea Publ. Co., Bronx, NY.
- [15] J.-D. BOISSONNAT et M. YVENEC (1995). *Géométrie Algorithmique*. Ediscience International, Paris.
- [16] V. BOLTYANSKI, H. MARTINI et P. S. SOLTAN (1997). *Excursions into Combinatorial Geometry*. Springer-Verlag, Berlin.
- [17] V. CHVÁTAL (1983). *Linear Programming*. Freeman, New York.
- [18] G. CHALMET, L. FRANCIS et A. KOLEN (1981). Finding efficient solutions for rectilinear distance location problems efficiently. *European Journal of Operational Research* 6, pp. 117–124.
- [19] V. CHEPOI (2000). Graphs of same CAT(0) complexes. *Advances Applied Mathematics* 24, pp. 125–179.
- [20] V. CHEPOI, K. NOUIOUA et Y. VAXÈS (2005). A rounding algorithm for approximating minimum Manhattan networks. In *Proceedings of APPROX 2005, the 8th International Workshop on Approximation Algorithms for Combinatorial Optimization Problems* (sous la direction de C. Chekuri, K. Jansen, D. P. Rolim et L. Trevisan), *Lecture Notes in Computer Science* 3624, pp. 40–51. Springer-Verlag, Berlin.
- [21] M. CHROBAK et L. L. LARMORE (1994). Generosity helps or an 11-competitive algorithm for three Servers. *Journal of Algorithms* 16(2), pp. 234–263.
- [22] W.J. COOK, W.H. CUNNINGHAM, W.R. PULLEYBLANK et A. SCHRIJVER (1997). *Combinatorial Optimization*. Wiley.
- [23] T. CORMEN, C. LEISERSON et R. RIVEST (1994). *Introduction à l'Algorithmique*. Dunod, Paris. (édition française)
- [24] M. DE BERG, M. VAN KREVELD, M. OVERMARS, O. SCHWARZKOPF et M. H. OVERMARS (2000). *Computational Geometry : Algorithms and Applications*. Springer-Verlag, Berlin.

-
- [25] M. M. DEZA et M. LAURENT (1997). *Geometry of Cuts and Metrics*. Springer-Verlag, Berlin.
- [26] A. W. M. DRESS (1984). Trees, tight extensions of metric spaces, and the cohomological dimension of certain groups : a note on combinatorial properties of metric spaces. *Advances in Mathematics*, 53, pp. 321–402.
- [27] A. W. M. DRESS et R. SCHARLAU (1987). Gated sets in metric spaces. *Aequationes Math.* 34, pp. 112–120.
- [28] R. DURIER (1990). On Pareto optima, the Fermat-Werber problem, and polyhedral gauges. *Mathematical Programming* 47, pp. 65–79.
- [29] R. DURIER et C. MICHELOT (1985). Geometrical properties of the Fermat-Weber Problem. *European Journal of Operational Research* 20, pp. 332–343.
- [30] R. DURIER et C. MICHELOT (1986). Sets of efficient points in normed space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 117, pp. 506–528.
- [31] I. EKELAND (1979). *Eléments d'Economie Mathématique*. Hermann, Paris.
- [32] D. EPPSTEIN (2000). Spanning trees and spanners. In *Handbook of Computational Geometry* (sous la direction de J.-R. Sack et J. Urrutia), pp. 425–461. Elsevier Science Publishers B.V. North-Holland, Amsterdam.
- [33] E. FINK et D. WOOD (2004). *Restricted-Orientation Convexity*. Springer-Verlag, Berlin.
- [34] M. R. GAREY et D. S. JOHNSON (1977). The rectilinear Steiner tree is NP-complete. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 32(4), pp. 826–834.
- [35] I.P. GENT et T. WALSH (1999). CSPLib : a benchmark library for constraints. APES Research Report 09-1999. Department of Computer Science, University of Strathclyde, Glasgow, Royaume-Uni.
- [36] J. GUDMUNDSSON, C. LEVCOPOULOS et G. NARASIMHAN (1999). Approximating minimum Manhattan networks. In *Proceedings of APPROX'99, the 2nd International Workshop on Approximation Algorithms for Combinatorial Optimization Problems* (sous la direction de D. S. Hochbaum, K. Jansen, D. P. Rolim et A. Sinclair), *Lecture Notes in Computer Science* 1671, pp. 28–38. Springer-Verlag, Berlin.
- [37] J. GUDMUNDSSON, C. LEVCOPOULOS et G. NARASIMHAN (2001). Approximating a minimum Manhattan network. *Nordic Journal of Computing* 8(2), pp. 219–232.
- [38] M. GROMOV (1987). Hyperbolic groups. *Essays in Group Theory*, Math. Sci. Res. Ins. Publ., 8, pp. 75–263, Springer.

- [39] A. GUÉNOCHE (1986). Graphical representation of a boolean array. *Computers and the Humanities* 20, pp. 277–281.
- [40] M. HANAN (1966). On Steiner’s problem with rectilinear distance. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 14(2), pp. 255–265.
- [41] P. HANSEN, T. PERREUR et J.F. THISSE (1980). Location theory, dominance and convexity : some further results. *Operations Research* 28, pp. 1241–1250.
- [42] F. K. HWANG, D. S. RICHARDS et P. WINTER (1992). The Steiner tree problem. *Annals of Discrete Mathematics* Vol. 53.
- [43] J.R. ISBELL (1964). Six theorems about metric spaces. *Comment. Math. Helv.* 39, pp. 65–74.
- [44] J.R. ISBELL (1980). Median algebra. *Transactions of the American Mathematical Society* 260, pp. 319–362.
- [45] A.V. KARZANOV (1998). Minimum 0-extensions of graph metrics. *European Journal of Combinatorics* 19, pp. 71–101.
- [46] R. KATO, K. IMAI et T. ASANO (2002). An improved algorithm for the minimum Manhattan network problem. In *Proceedings of ISAAC’02, the 13th International Symposium on Algorithms and Computation* (sous la direction de P. Bose et P. Morin), *Lecture Notes in Computer Science* 2518, pp. 344–356. Springer-Verlag, Berlin.
- [47] L. G. KHACHIAN (1979). A polynomial algorithm in linear programming. *Soviet Mathematics Doklady* 20, pp. 191–194.
- [48] H. W. KUHN (1967). A pair of dual nonlinear programs. In *Methods of Nonlinear Programming* (sous la direction de J. Abadie), pp. 37–64. North-Holland, Amsterdam.
- [49] H. W. KUHN (1973). A note on Fermat’s problem. *Mathematical Programming* 4, pp. 98–107.
- [50] F. LAM, M. ALEXANDERSON et L. PACTER (2003). Picking alignments from (Steiner) trees. *Journal of Computational Biology* 10, pp. 509–520.
- [51] C. LEVCOPOULOS et A. ÖSTLIN (1996). Linear-time heuristics for minimum weight rectangulation. In *Proceedings of SWAT’96, the 5th Scandinavian Workshop on Algorithm Theory* (sous la direction de R. Karlsson et A. Lingas), *Lecture Notes in Computer Science* 1097, pp. 271–283. Springer-Verlag, Berlin.
- [52] A. LINGAS, R. PINTER, R. RIVEST et A. SHAMIR (1982). Minimum edge length rectilinear decompositions of rectilinear figures. In *Proceedings of the 12th Annual Allerton Conference*

- [53] J.F. MAURRAS (2002). *Programmation Linéaire, Complexité : Séparation et Optimisation*. Springer-Verlag, Berlin.
- [54] H. M. MULDER (1978). The structure of median graphs. *Discrete Mathematics* 24, pp. 197–204.
- [55] H. M. MULDER (1980). The interval function of a graph. *Math. Centre Tracts* 132.
- [56] H. M. MULDER et A. SCHRIJVER (1979). Median graphs and Helly hypergraphs. *Discrete Mathematics* 25, pp. 41–50.
- [57] K. NOUIOUA (2004). Une approche primale-duale pour le problème du réseau de Manhattan minimal. *RAIRO Operations Research* (en révision).
- [58] B. PELEGRIN et F.R. FERNANDEZ (1988). Determination of efficient points in multiple-objective location problems. *Naval Research Logistics* 35, pp. 697–705.
- [59] F.P. PREPARATA et M.I. SHAMOS (1993). *Computational Geometry : an Introduction*. Springer-Verlag, Berlin.
- [60] S. K. RAO, P. SADAYAPPAN, F. K. HWANG et P. W. SHOR (1992). The rectilinear Steiner arborescence problem. *Algorithmica* 7, pp. 277–288.
- [61] A. SCHRIJVER (2002). *Combinatorial Optimization : Theory and Algorithms*. Springer-Verlag, Berlin.
- [62] W. SHI et C. SU (2000). The rectilinear Steiner arborescence problem is NP-complete. In *Proceedings of SODA 2000, the 11th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*. ACM Press, New-York, NY.
- [63] B. STURMFELS et J. YU (2004). Classification of six-point metrics. *The Electronic Journal of Combinatorics* 11.
- [64] É. TARDOS (1986). A strongly polynomial algorithm to solve combinatorial linear programs. *Operations Research* 34(2), pp. 250–256.
- [65] E. THIEL (1996). Toolkit Helium, <http://www.lif.univ-mrs.fr/~thiel/helium/>.
- [66] J. F. THISSE, J. E. WARD et R. E. WENDELL (1984). Some properties of location problems with block and round norms. *Operations Research* 32, pp. 1309–1327.

- [67] A. C. THOMPSON (1996). *Minkowski Geometry*. Encyclopedia of Mathematics and Applications, Vol. 63, Cambridge University Press, 364p.
- [68] V. TRUBIN (1985). Subclass of the Steiner problem on a plane with rectilinear metric. *Cybernetics* 21, pp. 320–322.
- [69] M. VAN DE VEL (1993). *Theory of Convex Structures*. North-Holland Mathematical Library, Vol. 50, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam.
- [70] M. VAN DE VEL (1998) Collapsible polyhedra and median spaces. *Proceedings of American Mathematical Society* 126, pp. 2811–2818.
- [71] M. VAN DE VEL (1999). Determination of $msd(L^n)$. *Journal of Algebraic Combinatorics* 9, pp. 161–171.
- [72] V. V. VAZIRANI (2001). *Approximation Algorithms*. Springer-Verlag, Berlin.
- [73] R. E. WENDELL et A.P. HURTER (1973). Location theory, dominance, and convexity. *Operations Research* 21, 314–320.
- [74] R. E. WENDELL, A.P. HURTER et T.J. LOWE (1973). Efficient points in location theory. *AIEE Transactions* 9, 238–246.
- [75] P. WIDMAYER, Y. F. WU et C. K. WONG (1985). Distance problems in computational geometry for fixed orientations. In *Proceedings of the 1st Annual ACM Symposium on Computational Geometry*, pp. 186–195.
- [76] P. WIDMAYER, Y. F. WU et C. K. WONG (1987). On some distance problems in fixed orientations. *SIAM Journal on Computing* 16(4), pp. 728–746.
- [77] M. WOO, J. NEIDER, T. DAVIS et D. SHREINER. OpenGL 1.2. CampusPress.
- [78] M. ZACHARIASEN (2001). The rectilinear Steiner tree problem : a tutorial. In *Steiner Trees in Industries* (sous la direction de D. -Z. Du et X. Cheng), pp. 467-507. Kluwer Academic Publishers.
- [79] M. ZACHARIASEN (2001). A catalog of Hanan grid problems. *Networks* 38(2), pp. 76–83.
- [80] A. ZELIKOVSKY (1991). An $11/8$ -approximation algorithm for the Steiner problem on networks with rectilinear distance. In *Janos Bolyai Mathematica Societatis Conference : Sets, Graphs, and Numbers*, pp. 733–745.

Résumé

Dans un espace métrique (\mathbb{R}^m, d) , l'*enveloppe de Pareto* d'un nuage de points T est constituée des points de \mathbb{R}^m non dominés (un point $q \in \mathbb{R}^m$ *domine* un point $p \in \mathbb{R}^m$ si $d(q, t) \leq d(p, t)$ pour tout terminal t et si $d(q, t') < d(p, t')$ pour un terminal t'). Les enveloppes de Pareto peuvent être vues comme une extension des enveloppes convexes usuelles dans le sens où ces deux objets géométriques coïncident lorsque d est la distance euclidienne. Elles ont la particularité d'accueillir les solutions optimales d'un grand nombre de problèmes d'optimisation. Dans la première partie de cette thèse, nous caractérisons ces enveloppes dans (\mathbb{R}^3, d_1) et dans (\mathbb{R}^m, d_∞) . Nous décrivons également un algorithme de construction optimal dans (\mathbb{R}^3, d_1) et un algorithme générique permettant de les construire dans \mathbb{R}^m pour toute distance issue d'une norme polyédrale. Dans la deuxième partie, nous nous intéressons au problème des réseaux de Manhattan minimum, dont certaines solutions optimales sont contenues dans les enveloppes de Pareto de (\mathbb{R}^2, d_1) . Pour un ensemble de terminaux T de \mathbb{R}^2 , un *réseau de Manhattan* est un réseau dans lequel il existe un plus court chemin rectilinéaire entre chaque paires de terminaux. Un *réseau de Manhattan minimal* est un réseau de Manhattan de longueur minimale. Ce problème a été formulé en 1999 par Gudmundsson, Levcopoulos et Narasimhan qui ont proposé deux algorithmes d'approximation avec des facteurs 4 et 8. Nous répondons à une de leurs conjectures en proposant deux algorithmes d'approximation avec un facteur 2. Ces deux algorithmes utilisent une formulation en programmation linéaire en nombres entiers du problème.

Mots-clés: géométrie algorithmique, algorithme d'approximation, distance, programmation linéaire, optimalité de Pareto, réseau rectilinéaire.

Abstract

Given a metric space (\mathbb{R}^m, d) and a finite set T of points, the *Pareto envelope* of T consists of all non-dominated points of \mathbb{R}^m (a point $q \in \mathbb{R}^m$ *dominates* a point $p \in \mathbb{R}^m$ if $d(q, t) \leq d(p, t)$ for all $t \in T$ and there exists $t' \in T$ such that $d(q, t') < d(p, t')$). The Pareto envelopes can be seen as a generalization of usual convex hulls because the two concepts coincide for the Euclidean metric. Pareto envelopes have the nice property to host all optimal solutions of several optimization problems. In the first part of this thesis, we characterize the Pareto envelopes in (\mathbb{R}^3, d_1) and (\mathbb{R}^m, d_∞) . We also describe an optimal algorithm for their construction in (\mathbb{R}^3, d_1) and a generic algorithm for all polyhedral metrics. In the second part of the thesis, we consider the minimum Manhattan network problem, for which there are optimal solutions contained in Pareto envelopes of (\mathbb{R}^2, d_1) . For a set T of terminals in \mathbb{R}^2 , a *Manhattan network* is a network that contains a shortest rectilinear path between every pair of terminals. A *minimum Manhattan network* on T is a Manhattan network of minimum length. Gudmundsson, Levcopoulos and Narasimhan introduced this problem in 1999 and described a factor 8 and a factor 4-approximation algorithms. We solve one of their conjectures by proposing two factor 2-approximation algorithms, both based on the integer linear programming formulation of the problem.

Keywords: computational geometry, approximation algorithm, distance, linear programming, Pareto optimality, rectilinear network.

